

G E B R A

KMO

$$f(x) = x - T$$

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO

12

Sucesiones y Series - Progresiones

Teoría y Práctica

A
L

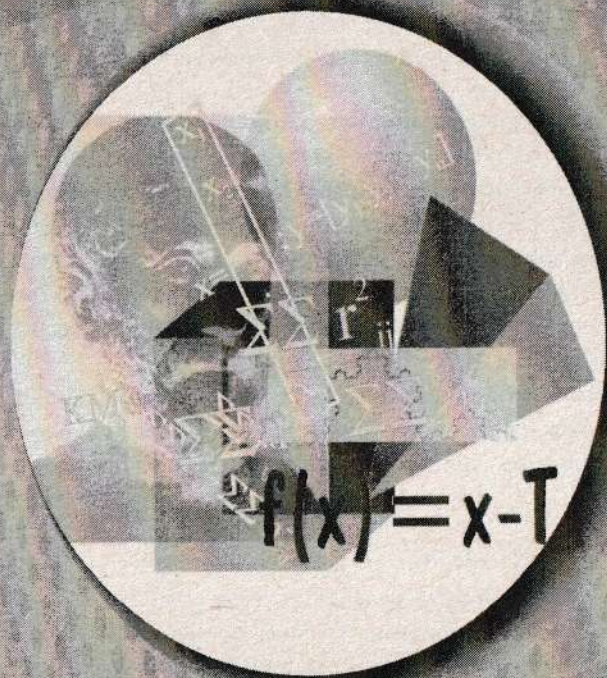


12

Sucesiones y Series - Progresiones

Teoría y Práctica

ALGEBRA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2015, en esta oportunidad presentamos el texto teórico-práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

SUCESIONES Y SERIES - PROGRESIONES



ÁLGEBRA- TEMA SELECTO 12, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Enero 2015 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2015 - 00608

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

Víctor Meneses Huamán

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

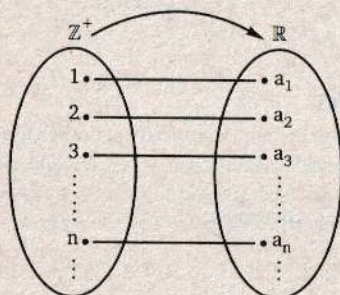
Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

SUCESIONES

DEFINICIÓN

Una sucesión es aquella función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$) y rango cualquier subconjunto del conjunto de los números reales. $a: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$



Del diagrama tenemos:

a_1 = Primer elemento (o término) de la sucesión

a_n = Término n -ésimo de la sucesión



OBSERVACIÓN

- 1) Si la sucesión tiene " n " términos se le podrá representar de la manera siguiente:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Veamos un ejemplo:

$$\{2n + 1\} = 3, 5, 7, 9, \dots, (2n + 1)$$

- 2) Si la sucesión consta de infinitos términos su representación será:

$$\{a_n\}_{n \geq 1} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Veamos un ejemplo:

$$\{n \cdot (-1)^n\}_{n \geq 1} = -1, 2, -3, 4, \dots, n \cdot (-1)^n, \dots$$

DETERMINACIÓN DE UNA SUCECIÓN

1. POR REGLA DE CORRESPONDENCIA

Aquí se conoce al término n -ésimo de la sucesión y a partir de él se obtienen los otros términos.

- Si: $a_n = n^2 + 1$, tenemos:

$$\{a_n\}_{n \geq 1}: 2, 5, 10, 17, \dots$$

2. POR LEY DE RECURRENCIA

Aquí se conoce algún término particular de la sucesión más cierta relación que vincula a los otros términos.

- Si: $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 3a_n + 1$, tenemos:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$$

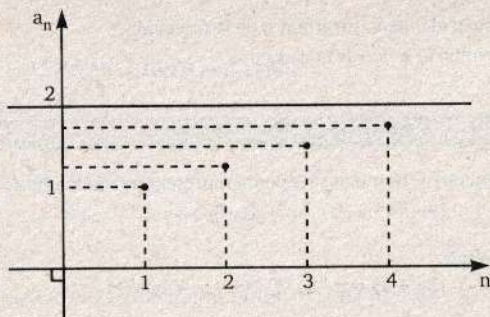
$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 22 + 1 = 67$$

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

Graficar una sucesión consiste en representar cada par ordenado de la forma $(n; a_n)$ en el plano cartesiano

- Para la sucesión $\left\{ \frac{2n}{n+1} \right\}_{n \geq 1}$ tenemos:

$$\left\{ \frac{2n}{n+1} \right\}_{n \geq 1} : 1; \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}; \frac{5}{3}; \dots$$

**LÍMITE DE UNA SUCESIÓN**

Dada la sucesión $\{a_n\}$, se dice que esta tiene por límite al número real L , si cuando n tiende al infinito ($n \rightarrow \infty$) simultáneamente a_n tiende a L ($a_n \rightarrow L$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L$$

Definición:

Sea la sucesión $\{a_n\}$, si se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L = \text{número real}$$

Se afirmara que $\{a_n\}$ es convergente y converge a L .

Teorema:

Si la sucesión $\{a_n\}$ converge a L cuando $n \rightarrow \infty$ se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$$



OBSERVACIÓN

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = +\infty \rightarrow \{a_n\}$ es divergente
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = -\infty \rightarrow \{a_n\}$ es divergente
- 3) Las propiedades para el límite de una sucesión son análogas a las del límite de una función por tanto se recomienda al lector considerarlas igual en este capítulo.

SUCESIONES MONÓTONAS

Dada la sucesión $\{a_n\}$, se dice que esta es monótona si corresponde a cualquiera de los siguientes casos:

1. SUCESIÓN CRECIENTE

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots; k \in \mathbb{Z}^+$$

2. SUCESIÓN DECRECIENTE

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_k > a_{k+1} > \dots; k \in \mathbb{Z}^+$$

3. SUCESIÓN NO DECRECIENTE

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \dots; k \in \mathbb{Z}^+$$

4. SUCESIÓN NO CRECIENTE

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots; k \in \mathbb{Z}^+$$



OBSERVACIÓN

- 1) $\{a_n\}$ es una sucesión constante si y sólo si $a_n = c; \forall n \in \mathbb{Z}^+$
 - $\{a_n\}$ con $a_n = 8$ verifica:

$$\{a_n\} = 8, 8, 8, 8, \dots$$
- 2) $\{a_n\}$ es una sucesión oscilante si sus términos se intercalan según la forma: $m, n, m, n, m, \dots$; de acuerdo con la definición no es monótona.
 - $\{a_n\}$ con $a_n = (-1)^n$ verifica:

$$\{a_n\} = -1, 1, -1, 1, \dots$$

SUCESIONES ACOTADAS

Dada la sucesión $\{a_n\}$

- 1) Se dice que la sucesión es acotada inferiormente si y sólo si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq M$;
 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$
- 2) Se dice que la sucesión es acotada superiormente si y sólo si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq N$;
 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Definición:

$\{a_n\}$ es una sucesión acotada si y sólo si es acotada inferiormente y superiormente a la vez.

$$M \leq a_n \leq N ; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Teorema:

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Propiedad:

Si una sucesión es convergente, entonces es acotada, el retorno no necesariamente se cumple.

PRUEBA DE LA RAZÓN PARA CONVERGENCIA DE SUCCESIONES

Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L ; L \in \mathbb{R}$$

Si $L < 1$, entonces la sucesión es convergente y converge a cero.

Teorema del Encaje:

Dadas las sucesiones $\{a_n\}$; $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

Si: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = L ; L \in \mathbb{R}$

Entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = L$

Teoremas Adicionales:

- 1) **De la media aritmética:** Siendo $\{a_n\}$ una sucesión convergente:

Si se tiene: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$

Entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right) = a$

- 2) **De la media geométrica:** Siendo $\{a_n\}$ una sucesión convergente

Si se tiene: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$

Entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \right) = a$

SERIES INFINITAS DE NÚMEROS REALES

DEFINICIÓN

Una serie es la suma de todos los términos de una sucesión, así pues para la sucesión $\{a_n\}$ tenemos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

La serie infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

- Para $a_n = \frac{1}{3^n}$ tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$$

SERIES CONVERGENTES Y DIVERGENTES

Definición 1:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente cuando la suma de sus "n" primeros términos no excede a alguna cantidad finita por grande que sea n ($n \rightarrow \infty$)

Definición 2:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente cuando la suma de sus "n" primeros términos es mayor que cualquier cantidad finita considerado n suficientemente grande ($n \rightarrow \infty$)

Teorema:

Dadas las series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con sumas a y b respectivamente

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot a$; $\forall k \in \mathbb{R}^*$

Propiedad:

Si la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a \dots + a_n + \dots$$

es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$



OBSERVACIÓN

Si la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

SERIES NOTABLES**1. SERIE ARMÓNICA**

Es aquella serie que presenta la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

es divergente

2. SERIE GEOMÉTRICA

Es aquella serie que representa la siguiente forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (aq^{n-1}) = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Si $|q| < 1$ la serie es convergente

Si $|q| \geq 1$ la serie es divergente

3. SERIE TELESCÓPICA

Es aquella que presenta la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$$

La serie telescópica converge si y sólo si b_{n+1} tiende a un número finito cuando $n \rightarrow \infty$, siendo su suma:

$$S = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1})$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS**1. DE COMPARACIÓN DIRECTA**

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

A) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a_n \leq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

B) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a_n \geq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

2. DE LA RAZÓN

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$, entonces:

A) Si $L < 1$, la serie es convergente

B) Si $L > 1$, la serie es divergente

C) Si $L = 1$, el criterio no decide

3. DE LA RAÍZ (CAUCHY)

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, entonces:

A) Si $L < 1$, la serie es convergente

B) Si $L > 1$, la serie es divergente

C) Si $L = 1$, el criterio no decide

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (P.A)

DEFINICIÓN

Es aquella sucesión en la que cada término excepto el primero es igual al término anterior aumentado en un valor constante llamada razón de la progresión.

REPRESENTACIÓN DE UNA P.A.

$$+ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

$$+ a_1 \cdot a_1 + r \cdot a_1 + 2r \cdot \dots \cdot a_1 + (n-1)r$$

Donde:

$+$ = inicio de la P.A.

$\cdot$ = separación de término

a_1 = primer término

a_n = término n-ésimo

n = número de términos

r = razón de la P.A.

CLASES DE P.A.

- 1) Si $r > 0$, la P.A. es creciente
- 2) Si $r < 0$, la P.A. es decreciente



OBSERVACIÓN

Si $r = 0$ se dice que la progresión aritmética es trivial.

PROPIEDADES DE UNA P.A.

Dada la siguiente progresión aritmética:

$$+ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Se cumple:

- 1) Razón (r)

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 12

- 2) Término n-ésimo (
- a_n
-)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

- 3) Número de términos (n)

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

- 4) Términos equidistantes de los extremos (
- $a_x \wedge a_y$
-)

$$\div a_1 \cdot \dots \cdot a_x \cdot \dots \cdot a_y \cdot \dots \cdot a_n$$

$\leftarrow$ "m" términos "m" términos $\rightarrow$

$$a_x + a_y = a_1 + a_n$$

- 5) Término central (
- a_c
-) : Siendo "n" impar la PA. admite término central.

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- 6) Suma de los "n" primeros términos de una PA. (
- S_n
-)

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$$

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \right] \cdot n$$

MEDIOS ARITMÉTICOS

Son los términos de una PA. comprendidos entre sus extremos, veamos un ejemplo:

$$\div 3 \cdot \underbrace{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27}_{\text{Medios aritméticos}} \cdot 31$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

Consiste en formar una PA, para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión aritmética:

$$\div a \cdot \underbrace{\dots}_{\text{"m" Medios aritméticos}} \cdot b$$

Por fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)r$ donde N° de términos $n = m + 2$

Reemplazando: $b = a + (m + 1)r$

$$r = \frac{b - a}{m + 1}$$

fórmula cuyo nombre es razón de interpolación.

PROGRESIÓN ARMÓNICA (P.H)

DEFINICIÓN

Es aquella sucesión donde ninguno de sus términos es cero y los recíprocos de los mismos forman una progresión aritmética.

Si la sucesión:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$$

Es una progresión armónica, se verifica lo siguiente:

$$\div \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

DEFINICIÓN

Es aquella sucesión en la cual el primer término es diferente de cero y se caracteriza porque cualquier término, excepto el primero, es igual al término anterior multiplicado por un valor constante llamada razón de la progresión.

REPRESENTACIÓN DE UNA P.G.

$$\div t_1 : t_2 : t_3 : \dots : t_n$$

$$\div t_1 : t_1 q : t_1 q^2 : \dots : t_1 q^{n-1}$$

Donde:

$\div$ = inicio de la progresión

:

t_1 = primer término

t_n = término n-ésimo

n = número de término

q = razón de la P.G.

CLASES DE P.G.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1) Si $q > 1$, la P.G. es creciente | } Para P.G. de términos positivos |
| 2) Si $0 < q < 1$, la P.G. es decreciente | |
| 3) Si $q < 0$, la P.G. es alternante | |

PROPIEDADES DE UNA P.G.

Dada la siguiente progresión geométrica

$$++ t_1 : t_2 : t_3 : \dots : t_{n-1} : t_n$$

Se cumple:

- 1) Razón (q)

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

- 2) Término n -ésimo (t_n)

$$t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$$

- 3) Número de términos (n): Teniendo en cuenta que t_n , t_1 y q son positivos.

$$n = \frac{\log(t_n) - \log(t_1)}{\log(q)} + 1$$

- 4) Términos equidistantes de los extremos (t_x y t_y)

$$++ t_n : \dots : t_x : \dots : t_y : \dots : t_1$$

$\xleftarrow{\quad}$ $\xrightarrow{\quad}$
 "m" términos "m" términos

$$t_x \cdot t_y = t_1 \cdot t_n$$

- 5) Término central (t_c): Siendo " n " impar, la P.G. admite término central.

$$t_c = \sqrt{t_1 \cdot t_n}$$

- 6) Suma de los "n" primeros términos de una PG. (S_n)

$$S_n = t_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) ; q \neq 1$$

- 7) Suma límite ($S_{\lim}$) : Para PG. de infinitos términos, es decir en caso de que $n \rightarrow \infty$

$$S_{\lim} = \frac{t_1}{1 - q} ; -1 < q < 1$$

- 8) Producto de los "n" primeros términos de una PG. (P_n)

$$P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

MEDIOS GEOMÉTRICOS

Con los términos de una PG. comprendidos entre sus extremos, veamos un ejemplo:

$$\div \div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$$

Medios geométricos

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Consiste en formar una PG, para lo cual se debe conocer los términos extremos y el número de medios que se quiere interpolar.

Sea la progresión geométrica:

$$\div \div a : \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{"m" Medios geométricos}} : b$$

Por fórmula: $t_n = t_1 q^{n-1}$

Reemplazando: $b = a \cdot q^{m+1}$

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

fórmula cuyo nombre es razón de interpolación.



PROBLEMAS RESUELTOS

- Para que valor de "m" los términos $5,2m + 3,12$ (en ese orden) forman una progresión armónica.

A) 7 B) 12 C) $\frac{61}{30}$
D) $\frac{67}{34}$ E) $\frac{69}{34}$
- Encontrar al término que ocupa la posición 41 en la siguiente progresión aritmética.
: 3 . 13 . 23

A) 401 B) 403 C) 405
D) 407 E) 409
- Proporcionar el término de lugar 101 en la siguiente PA.
: (x+1) . 2x . 8

A) 197 B) 201 C) 204
D) 207 E) 209
- De una PA. se sabe que:
 $S_n = 120$; $a_1 = 3$; $r = 2$
encontrar "n"

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12
- Si en una PA. se cumple:
 $a_1 + a_2 + a_3 = 36$; determinar a_2

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14
- Encontrar la razón de aquella progresión aritmética cuya suma de sus "n" términos viene dada por:
 $S_n = 2n^2 + 3n$

A) 7 B) 6 C) 5
D) 4 E) 3
- A continuación se muestran tres términos consecutivos de una progresión aritmética.
 $2.(x-2).10$ ¿Cuál es el valor de "x"?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12
- En la PA. el número de términos comprendidos entre 23 y 59 es el doble que los comprendidos entre 3 y 23, determinar el número de términos de dicha PA.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18
- El equivalente de:
 $S + 8 + 11 + 14 + \dots + (3n+2)$ es:

A) $n^2 + n$ B) $n^2 + \frac{5}{2}n$
C) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n$
D) n^2 E) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$

10. En una P.A. creciente la suma de los 3 primeros términos es 24 y la suma de sus cuadrados es 242. Encontrar el 3er término.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

11. Encontrar el término que ocupa la posición once en la siguiente progresión geométrica

$$\div 3:6:12 \dots$$

A) 3072 B) 3073 C) 3075
D) 3077 E) 3079

12. Para que valor de "x" los números: 5; 9; $(3x-1)$ forman una progresión geométrica (en ese orden)

A) 7 B) $\frac{15}{2}$ C) $\frac{77}{5}$
D) $\frac{86}{15}$ E) $\frac{87}{17}$

13. Encontrar el sexto término de la siguiente PG.: $\div 4:3x:9x:\dots$

A) 970 B) 972 C) 973
D) 974 E) 975

14. En una progresión decreciente; la suma de sus 3 únicos términos es 35 y su producto es 1000. Encontrar el menor de ellos.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

15. En cierta PG. creciente se cumple:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = 1 \wedge t_3 = 2t_2$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2
D) $\frac{3}{2}$ E) 3

16. Efectuar:

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \dots$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{17}{2}$
D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{21}{4}$

17. Encontrar la razón de interpolación de seis medios geométricos entre 8 y 1024.

A) 2 B) 3 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) 3

18. La suma de los 6 primeros términos de una progresión geométrica es igual a 9 veces la suma de los 3 primeros términos entonces la razón de la progresión es:

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

19. Calcular el número de términos de una PG. de razón 2; siendo 189 la suma de ellos y la suma de sus cuadrados 12285

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

20. Tres números positivos cuya suma es 21 forman una P.A., si a estos números les agregamos respectivamente 2, 3 y 9 los nuevos números forman ahora una progresión geométrica. Luego el término último de la progresión aritmética es:
- A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13
21. En una progresión geométrica de "n" términos la suma de los (n-1) primeros términos es 252 y la suma de los (n-1) últimos es 504. Calcular la razón.
- A) 2 B) 1/2 C) 3
D) 1/3 E) 4
22. Determinar el término general de la siguiente sucesión aritmética:
3, 8, 13,
- A) $n+2$ B) $5n-2$ C) $2n+1$
D) $4n-1$ E) n^2-1
23. La suma de los "n" primeros términos de una P.A. viene dado por:
 $S_n = 4n^2 + n$; luego la razón es:
- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9
24. El equivalente de:
 $5+9+13+17+ \dots + (4n+1)$ es:
- A) $n^2 + n$ B) $2n^2 + n$ C) $2n^2 + 3n$
D) $2n^2 - n$ E) $2n^2 - 3n$
25. Encontrar el onceavo término de la sucesión: $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \dots$ sabiendo que cada término se obtiene sumando al anterior una constante.
- A) 1 B) $\frac{5}{2}$ C) 3
D) $\frac{7}{2}$ E) 5
26. En una sucesión aritmética: 24; 10 y 105 son el último término, el número de términos y su suma respectivamente. ¿Cuál es el producto del primer término por la razón en dicha sucesión?
- A) -5 B) 5 C) -1
D) -9 E) 9
27. Determinar el número de medios aritméticos que se pueden interpolar entre los números.
- $\frac{1}{2} \dots \dots \dots \frac{3}{4}$
- Si la razón de la interpolación es 1/64
- A) 12 B) 14 C) 15
D) 17 E) 18
28. Que lugar ocupan los términos consecutivos de la siguiente sucesión aritmética cuya diferencia de cuadrados es 440.
- : 5, 9, 13, 17,
- A) $13 \wedge 14$ B) $21 \wedge 22$ C) $33 \wedge 34$
D) $17 \wedge 18$ E) $23 \wedge 24$

29. El séptimo término de una sucesión aritmética decreciente constituye el 80% del 3er término de la misma sucesión y su producto es igual a 80. ¿Cuántos términos hay que tomar de esta sucesión para que su suma sea igual a 50?

A) 5 B) 40 C) 5 ó 40
D) 10 ó 40 E) 10

30. En las siguientes sucesiones aritméticas:

: 2, 4, 6,
: 3, 6, 9,

Determinar los valores de dos términos correspondientes de estas sucesiones, siendo el producto de ellos 216, dar la suma de dichos términos.

A) 29 B) 30 C) 31
D) $a \vee b$ E) $a \vee c$

31. Si: $\frac{2}{5}; \frac{1}{2m-1}; \frac{5}{4}$ son tres términos consecutivos de una PH. ¿Cuál es el valor de m?

A) 5,3 B) $\frac{53}{20}$ C) $\frac{53}{30}$
D) $\frac{53}{40}$ E) $\frac{40}{53}$

32. Determinar el término general de la siguiente sucesión geométrica.

$\div \div 2 : 8 : 32 : \dots\dots\dots$

A) 2^{n-1} B) 2^{n+1} C) 2^{2n+1}
D) 2^{2n-1} E) 2^n

33. Sumar:

$$S = 0,2 + 0,04 + 0,008 + \dots\dots$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

34. La siguiente PG. consta de 7 términos:

$\div \div 3 : \dots\dots\dots : 192$

Determinar su suma

A) 189 B) 243 C) 273
D) 324 E) 381

35. Sabiendo que: $\div \div a : b : c : d$;

además $a - d = 7$

Calcular el valor de:

$$w = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$$

A) 19 B) 14 C) 21
D) 49 E) 34

36. Interpolan 3 medios proporcionales entre: ab y a/b ; indicar el 3er término de la progresión obtenida.

A) b B) ab^2 C) $a\sqrt{b}$
D) $\frac{a\sqrt{b}}{b}$ E) a

37. En una PG. de cuatro términos la suma de los 2 primeros es 1 y la de los dos últimos es 16. ¿Cuál es el mayor término?

A) $\frac{64}{5}$ B) $\frac{64}{3}$ C) $\frac{81}{5}$
D) $\frac{68}{3}$ E) $\frac{90}{7}$

38. Mostrar uno de los dos términos consecutivos de la PG.:
 $++ 7:21:63: \dots\dots\dots$
 sabiendo que su suma es 2268.
 A) 567 B) 560 C) 580
 D) 576 E) 565
39. El número de términos de una PG. es 6 la suma de todos ellos es 364 y la diferencia entre el cuarto término y el tercero es igual al séxtuplo del segundo. ¿Cuál es el 1er término?
 A) 1 B) 52/3 C) 2
 D) 4 E) $A \vee B$
40. Si 1 y 2 son los términos extremos de una PG. de 24 términos, calcular el producto de todos los términos de la PG.
 A) 512 B) 1024 C) 2048
 D) 4096 E) 9992
41. Calcule el número de términos de una PG. de razón 2 siendo 189 la suma de ellos y la suma de sus cuadrados es 12285.
 A) 5 B) 6 C) 7
 D) 8 E) 9
42. Hallar el vigésimo término de la PA.:
 $2; 5; 10; 17; 26; \dots\dots\dots$
 A) 399 B) 407 C) 401
 D) 504 E) 473
43. Hallar el término general de la siguiente PA.:
 $1; 5; 11; 19; \dots\dots\dots$
 A) $n^2 - n - 1$ B) $n^2 + n - 1$
 C) $n^2 + 2n - 3$
 D) $n^2 + n - 2$ E) $2n^2 - 3n - 1$
44. Con respecto al problema anterior; la suma de los ocho primeros términos es:
 A) 223 B) 324 C) 740
 D) 423 E) 232
45. Verificar si la sucesión:
 $1.2.3, 2.3.4, 3.4.5, \dots\dots\dots,$
 $k.(k+1).(k+2)$
 es hipergeométrica.
46. Con respecto al problema anterior. Calcular la suma de los "n" primeros términos de la sucesión.
 A) $\frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{2}$
 B) $\frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{4}$
 C) $\frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{2}$
 D) $\frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{4}$
 E) $\frac{n^4 + 11n^2 + 6}{4}$

47. Indicar el término que ocupa la posición 210 en la siguiente PH

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{23}, \frac{1}{31}, \dots$$

- A) $\frac{1}{1679}$ B) $\frac{1}{1681}$ C) $\frac{1}{1683}$
D) $\frac{1}{1685}$ E) $\frac{1}{1769}$

48. En la P.A. : 3 30 b

El número de términos comprendidos entre 3 y 30 es igual a los comprendidos entre 30 y b. Si además la suma de todos los términos es 570. Hallar la razón.

- A) 2 B) 3 C) 6
D) 9 E) 4

49. Una persona debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 25 árboles que están al lado de una calzada. Los árboles están a 4m de distancia y la cantera de arena está a 10m antes del 1er árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido la persona después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla a la cantera?

- A) 2100 B) 2300 C) 2900
D) 2600 E) 3100

50. Una pelota cae desde una altura de 128cm y cada vez que rebota alcanza una altura igual a los $\frac{15}{16}$ de la altura de la cual cayó. ¿Cuál será la distancia recorrida por la pelota hasta quedar en reposo?

- A) 3698 cm B) 3896 cm
C) 3096 cm
D) 4068 cm E) 3968 cm

51. En un círculo de radio "R" se inscribe un triángulo equilátero en este se inscribe un círculo y en este segundo círculo se inscribe un nuevo triángulo equilátero y así sucesivamente. Calcular la suma límite de las áreas de todas las figuras así formadas.

- A) $\frac{R^2}{3}(2\pi + \sqrt{3})U^2$
B) $\frac{R^2}{3}(\pi + 3\sqrt{3})U^2$
C) $\frac{R^2}{3}(4\pi + \sqrt{3})U^2$
D) $\frac{R^2}{3}(4\pi + 3\sqrt{3})U^2$
E) $\frac{R^2}{4}(3\pi + 4\sqrt{3})U^2$

52. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

- I. La sucesión $\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}$ es acotada inferiormente.
II. La sucesión $\{n^2\}$ es acotada inferiormente.
III. La sucesión $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ es acotada superiormente.

- A) VFF B) VFV C) VVV
D) FVV E) FFF

53. Con respecto a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2} \right)$$

Se afirma que:

- A) Converge a 2 B) Converge a 1
C) Converge a 0
D) Converge a $\frac{1}{2}$ E) Es divergente
54. Dada la sucesión:
 $\{0; 0; 6; 24; 60; 120; \dots\}$
Determine el lugar que ocupa el número 1320.

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

55. El término de posición "n" de la sucesión:

$$\left\{ 4; 8; \frac{32}{3}; \frac{32}{3}; \frac{128}{15}; \dots \right\} \text{ es:}$$

- A) $\frac{2^n}{n}$ B) $\frac{4^n}{n!}$ C) $\frac{8^n}{n!}$
D) $\frac{n+4}{n!}$ E) $\frac{n+2}{n!}$

56. Dada la sucesión
- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
- , que cumple:

$$x_{n+1} = x_n + 2 + \sqrt{9 + 8x_n},$$

$$\forall n \geq 0 \wedge x_0 = 0$$

Determine el valor de $\frac{x_{2003}}{2003}$

- A) 4009 B) 4018 C) 4021
D) 4024 E) 4026

57. Dada la sucesión:

$$\left\{ \frac{6}{2}, \frac{11}{5}, \frac{16}{8}, \frac{21}{11}, \dots \right\}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I. La sucesión es creciente.
II. El término de lugar 81 es $\frac{203}{121}$.
III. La sucesión es acotada.
IV. La sucesión es convergente.

- A) VVVV B) VFVF C) VFFV
D) FVFV E) FVVV

58. Indique si es verdadero (V) o es falso (F) las siguientes afirmaciones:

- I. $\left\{ \frac{(-1)^n}{2n^2 + 1} \right\}_{n \geq 1}$ es acotada.
II. $\{1 + (-1)^n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión alternante.
III. $\left\{ \frac{n^3 + 2}{n^4 + 1} \right\}_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente.

- A) VVV B) VFV C) FVV
D) FFV E) FFF

59. Indicar el valor de verdad de las afirmaciones:

I. La sucesión $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}_{n \geq 1}$ es creciente.

II. La sucesión $\left\{ 1 + \frac{1}{2^n} \right\}$ es decreciente y acotada.

III. La sucesión $\{(-2)^{n^2}\}$ no está acotada

- A) VFF B) VVV C) FVV
D) FFV E) FFF

60. Sea la sucesión:

$$\left\{ \frac{10^n}{2^{n^2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Indique cual de los enunciados son correctos:

- I. La sucesión es monótona.
II. La sucesión es acotada.
III. La sucesión es convergente.

- A) VFF B) VVV C) FVV
D) FFV E) FFF

61. Dada la sucesión de números reales

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Se puede afirmar que:

- A) $\{x_n\}$ no es acotada
B) $\{x_n\}$ es creciente
C) $x_n > 1 \forall n$ número natural
D) $\{x_n\}$ es decreciente
E) $\{x_n\}$ es divergente

62. Si la sucesión:

$$\left\{ \sqrt{an^2 + bn + c} - \sqrt{a}n \right\}_{n \in \mathbb{N}}; \text{ converge}$$

al valor de $\frac{a}{b\sqrt{2}}$, entonces una relación entre a y b es:

- A) $a^4 = 2b^3$ B) $a^3 = 2b^2$
C) $a^4 = b^3$
D) $a^3 = 2b^4$ E) $b^4 = 2a^3$

63. Determine el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \frac{\text{sen}(n!)}{n} \right\}_{n \geq 1}$$

- A) 0 B) 1 C) $\frac{\pi}{2}$
D) π E) 2π

64. Indique si es verdadero (V) o es falso (F) las siguientes afirmaciones:

I. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+3} - 3) = a$$

II. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = a$

III. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ convergen.

- A) VVV B) VFF C) FVV
D) FFV E) FFF

65. Si la sucesión: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} - an - b, \text{ converge a cero,}$$

entonces el valor de a.b es:

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

66. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ / $a_n = \frac{n^2}{5^n + 1}$. Determinar la convergencia de la sucesión.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 5

67. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en la siguiente sucesión:

$$\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^{10}, \left(\frac{31}{30}\right)^{30}, \left(\frac{69}{68}\right)^{68}, \dots \right\}$$

calcular su valor de convergencia.

- A) $2e^{-1}$ B) $4e^{-3}$ C) $8e^{-1}$
D) e E) $\frac{3}{5}e$

68. Sean las sucesiones:

I) $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = \frac{1}{2}, \dots,$$

$$S_{2k-1} = \frac{1}{k}, S_{2k} = 0, k \geq 2$$

II) $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$P_0 = 1, P_1 = 7, P_2 = 0, P_3 = \frac{1}{2}, \dots,$$

$$P_{2k-1} = \frac{1}{k}, P_{2k} = 1, k \geq 2$$

Respecto a los posibles límites de las sucesiones, se puede afirmar respectivamente.

- A) 0; 0
B) 0; 1
C) No existe; no existe
D) No existe; 1
E) 0; no existe

69. Sean las sucesiones

$$b_{n+1} = b_n + 4 \text{ con } b_1 = 5$$

$$c_{n+1} = -3c_n \text{ con } c_1 = 5, n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{b_n}{c_n}$$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $\{a_n\}$ es una sucesión convergente y alternante.
II. $\{|a_n|\}$ es una sucesión monótona y divergente
III. $\{a_n\}$ converge a 0.

- A) FFF B) FFV C) VFF
D) VFV E) VVV

70. Sean las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Halle, si existe el menor número natural n de modo que:

$$|a_n - b_n| < 10^{-6}$$

- A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

71. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$I_n = \left[0; \frac{1}{n} \right]$$

$$J_n = \left(0; \frac{1}{n} \right)$$

$$K_n = \langle n; +\infty \rangle$$

Indique los valores de verdad de

I. $\exists x > 0 / x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

II. $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$

III. $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$

- A) FVF B) FFF C) VFV
D) VVF E) VVV

72. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que

$a_1 = \sqrt[3]{6}$ y $a_{n+1} = \sqrt[3]{6+7a_n}$. Calcular el valor de convergencia.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

73. Hallar el valor de la siguiente suma finita

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{(n+3)(n+5)}$$

- A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{941}{4368}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

74. Indicar el valor de verdad de:

I. $\sum_{k=1}^n (k+2) = \frac{n(n-1)}{2} + 2n$

II. Si $\sum_{k=1}^n (k+1) = 27$ entonces $n = 9$

III. $\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \left[\frac{3^{100}-1}{3^{100}} \right]$

- A) FFF B) VVV C) FVF
D) VVF E) FFV

75. Hallar n en la siguiente ecuación

$$\underbrace{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \dots}_{n \text{ sumandos}} = 14n + 49$$

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

76. En la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = \lambda \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$$

determinar el valor de λ .

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

77. Determine:

$$E = \sum_{k=1}^n k 2^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) 2^{k-2}$$

- A) $(n-1)2^n$ B) $1 + (n-1)2^n$
C) $2 + (n-1)2^{n+1}$
D) $4 + (n-1)2^n$ E) $3 + (n-1)2^n$

78. Sea

$$S = \sum_{k=1}^{n+1} \log \left[2^{2^k} \cdot \tan^k \left(k\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Halle S en términos de n.

- A) $2^{n+1} \log 2$
 B) $2^{n+1} - 1$
 C) $2(2^{n+1} - 1) \log 2$
 D) $(2^{n+1} - 1) \log 2$
 E) $(2^{n+1} + 1) \log 2$

79. Dado:

$$\underbrace{2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \dots}_{n \text{ sumandos}}$$

Hallar el número de sumandos tal que
 $S = 1760$

- A) 10 B) 11 C) 12
 D) 13 E) 14

80. Encontrar:

$$E = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{4}{16n^2 + 24n + 5} \right)$$

- A) $\frac{76}{405}$ B) $\frac{78}{405}$ C) $\frac{80}{405}$
 D) $\frac{82}{405}$ E) $\frac{84}{405}$

81. En relación a la suma S:

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2010^2} + \frac{1}{2011^2}}$$

Determinar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

- I. $S > 2010$
 II. $S < 2010$
 III. $\lfloor S \rfloor = 2011$

- A) VVV B) VVF C) VFV
 D) VFF E) FVF

82. Simplificar la expresión S

$$S = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} + \sum_{k=0}^n 2^k - \sum_{k=0}^n 2^{n-k+1}$$

- A) 1 B) 0 C) 2^{2n}
 D) 2^n E) 2^{n+1}

83. Determine la suma de la serie

$$S = \frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{11}{125} + \frac{20}{625} + \dots$$

- A) $\frac{41}{48}$ B) $\frac{43}{48}$ C) $\frac{11}{12}$
 D) $\frac{15}{16}$ E) $\frac{47}{48}$

84. Hallar el valor de convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n(n+1)}$$

- A) 0 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
 D) 2 E) $\frac{3}{2}$

85. Halle el menor valor entero positivo para m tal que:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} < \frac{1}{500}$$

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

86. Indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I. Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente,

$$\text{entonces } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

- II. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^3 - 1}$ converge

- III. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

- A) VFV B) VVF C) VFF
D) VVV E) FVV

87. Halle el valor de convergencia de la serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)e^x}{3^k k(k+1)}$$

- A) $\frac{1}{3}e^x$ B) $\frac{1}{2}e^x$ C) e^x
D) $2e^x$ E) $3e^x$

88. Dada la siguiente sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que se verifica $a_n = x a_{n-1}$, donde

$$|x| < 1 \text{ y } a_0 = 1. \text{ Si además } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{3}{2},$$

$$\text{hallar el valor de } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$$

- A) $\frac{26}{27}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{27}{26}$
D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{1}{8}$

89. $S = \frac{2}{3} + \frac{5}{3^2 \cdot 2!} + \frac{8}{3^3 \cdot 3!} + \dots$

- A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

90. Determine el valor de n en

$$\underbrace{\frac{0!}{2!} + \frac{1!}{3!} + \frac{2!}{4!} + \frac{3!}{5!} + \dots}_{n \text{ términos}} = \frac{n^2 + n}{36}$$

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

91. Calcular $S_1 = 1 + \frac{2}{\pi} + \frac{3}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^3} + \dots$

- A) $\pi^2/(\pi-1)^2$ B) $2\pi^2/(\pi+1)^2$
C) $2\pi^2/(\pi-1)$
D) $2\pi^2/(\pi+1)^2$ E) $1/(\pi-1)^2$

92. Calcule el valor de M

$$M = a_0 a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots$$

Considere que

$$a_n = 3^{0,5^n}; n = 0; 1; 2 \dots$$

- A) $\sqrt{3}$ B) 81 C) 3
D) 9 E) $2\sqrt{3}$

93. Calcule el valor de convergencia de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

- A) $e - 1$ B) $xe - 1$ C) $e^x - 1$
 D) $\frac{e^{2x} - 1}{e - 1}$ E) $\frac{e^x - 1}{e - 1}$

94. Un paciente recibe una inyección de 10 unidades de cierto medicamento cada 24 horas. El medicamento se elimina exponencialmente, de modo que la fracción que queda en el cuerpo del paciente después de "t" días es $f(t) = e^{-t/5}$. Si el tratamiento continúa indefinidamente, ¿cuántas unidades del medicamento habrá en el cuerpo del paciente, a largo plazo?

- A) $10e^{-1/5}$ B) $\frac{10e^{-1/5}}{1 + e^{-1/5}}$
 C) $\frac{10}{e^{1/5} - 1}$
 D) $\frac{10}{1 + e^{1/5}}$ E) $\frac{10e^{-1/5}}{e^{-1/5} - 1}$

95. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ tiene término general $a_n = 0$

II. $S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ tiene como término general $a_n = \frac{(-1)^n}{4n}$

III. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

- A) FFF B) FFV C) FVF
 D) VFF E) VVF

96. Dadas las siguientes afirmaciones:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ es convergente.

II. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

III. $\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor$ es convergente.

Indique el valor de verdad.

- A) FFV B) VVF C) VVF
 D) FVF E) VVF

97. Determinar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ es siempre convergente.

II. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2010^n}{(n+1)!}$ es convergente.

III. Sean $0 \leq a_n \leq b_n$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

- A) FFV B) FFV C) VVF
 D) VFF E) FVF

98. El valor de $\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-4n}$ es :

- A) $\frac{1}{e^8 - e^4}$ B) $\frac{1}{e^8 + 1}$ C) $\frac{1}{e^8 - 1}$
D) $\frac{1}{e^{16} + 1}$ E) $\frac{1}{e^{15} - 1}$

99. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos, hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones respecto a la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1 + n^2 \cdot x_n}$$

- I. Es convergente.
II. Es divergente.
III. Es acotada.

- A) VFF B) FVF C) VFV
D) FFV E) FFF

100. Determine el valor de verdad de las afirmaciones:

I. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}^5}$ es divergente.

II. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n(n+1)}$ es convergente.

III. Si $0 < a < b < 1$, entonces la serie

$\sum_{k=0}^{\infty} a^{-bk}$ es convergente.

- A) VVV B) VFF C) VVF
D) FVF E) FFF

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:**

De acuerdo con lo expuesto en la teoría la progresión aritmética que se forma es:

$$: \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2m+3} \cdot \frac{1}{12}$$

Ahora por la propiedad de la razón se tendrá:

$$\frac{1}{2m+3} - \frac{1}{5} = \frac{1}{12} - \frac{1}{2m+3}$$

De donde:

$$\frac{2}{2m+3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{5} = \frac{17}{60}$$

$$120 = 34m + 51 \Rightarrow 34m = 69$$

$$\therefore m = 69/34$$

Rpta.: E**Resolución 2:**

Por la propiedad de la razón:

$$r = 13 - 3 \Rightarrow r = 10$$

Por la propiedad del término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Donde en nuestro caso:

$$n = 41 ; a_1 = 3 \wedge r = 10$$

$$\Rightarrow a_{41} = 3 + (40)(10) = 3 + 400$$

$$\therefore a_{41} = 403$$

Rpta.: B**Resolución 3:**

Hallemos el valor de "x" con el auxilio de la propiedad de la razón, veamos:

$$2x - (x + 1) = 8 - 2x$$

De donde:

$$4x = 8 + x + 1 \Rightarrow x = 3$$

Ahora la P.A. será:

$$: 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots\dots$$

De donde se observa:

$$t = 6 - 4 \Rightarrow r = 2$$

Finalmente tenemos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{101} = 4 + (100)(2) = 4 + 200 = 204$$

Rpta.: C

Resolución 4: Teniendo en cuenta que S_n es la suma de los "n" primeros términos de la P.A. ; podemos plantear.

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \right] n$$

Ahora en el problema:

$$120 = \left[\frac{2(3) + (n-1) \cdot 2}{2} \right] n = \left[\frac{2n+4}{2} \right] n$$

Simplificando tenemos:

$$120 = [n+2]n \Leftrightarrow 120 = n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow n^2 + 2n - 120 = 0$$

Factorizando conseguimos:

$$(n-10)(n+12) = 0$$

De donde tenemos:

$$n-10 = 0 \vee n+12 = 0$$

$$\Rightarrow n = 10 \vee n = -12$$

Como "n" es número de términos; este debe ser entero positivo

$$\therefore n = 10$$

Rpta.: C

Resolución 5: De acuerdo con la definición dada para una P.A. tenemos:

$$a_2 = a_1 + r \wedge a_3 = a_1 + 2r$$

Por condición:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36$$

$$a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 36$$

$$3a_1 + 3r = 36$$

$$3(a_1 + r) = 36$$

$$a_1 + r = 12$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$\therefore a_2 = 12$$

Rpta.: C

Resolución 6: Se cumple:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Luego tenemos:

$$S_1 = a_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \dots \dots \dots (2)$$

Por condición:

$$S_n = 2n^2 + 3n$$

Haciendo: $n = 1$

$$S_1 = 2(1)^2 + 3(1) \Rightarrow S_1 = 5$$

Haciendo: $n = 2$

$$S_2 = 2(2)^2 + 3(2) \Rightarrow S_2 = 14$$

En la relación (1) tenemos:

$$S_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 5$$

En la relación (2) tenemos:

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$14 = 5 + a_2 \Rightarrow a_2 = 9$$

Por la propiedad de la razón:

$$r = a_2 - a_1$$

$$r = 9 - 5$$

$$\therefore r = 4$$

Rpta.: D

Resolución 7:

Teniendo en cuenta a la propiedad de la razón, se podrá plantear lo siguiente:

$$(x - 2) - 2 = 10 - (x - 2)$$

De donde:

$$2(x - 2) = 12 \Rightarrow x - 2 = 6$$

$$\therefore x = 8$$

Rpta.: A

Resolución 8:

De acuerdo con el enunciado tenemos:

$$: \underbrace{3 \dots \dots \dots 23}_{\text{"m" términos}} \dots \dots \dots \underbrace{59}_{\text{"2m" términos}}$$

Una rápida inspección permite observar que estamos frente a un caso de interpolación por partes para una progresión aritmética, en consecuencia la razón de interpolación de "m" términos entre 3y 23 es la misma que la de "2m" términos entre 23 y 59.

Ahora de acuerdo con la teoría tenemos:

$$\frac{23 - 3}{m + 1} = \frac{59 - 23}{2m + 1} \Leftrightarrow \frac{20}{m + 1} = \frac{36}{2m + 1}$$

$$\frac{5}{m + 1} = \frac{9}{2m + 1} \Rightarrow 10m + 5 = 9m + 9$$

$$10m - 9m = 9 - 5 \Rightarrow m = 4$$

Finalmente se observa que el número de términos de la progresión aritmética dada es:

$$\begin{aligned} n &= 3 + m + 2m = 3 + 3m \\ n &= 3 + 3(4) \\ \therefore n &= 15 \end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 9:

Una rápida inspección permite observar que estamos frente a la suma de los términos de una P.A.; donde:

$$\begin{aligned} \text{Primer término} &= a_1 = 5 \\ \text{Último término} &= a_n = 3n + 2 \\ \text{Número de términos} &= n \end{aligned}$$

Ahora según la fórmula:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} S_n &= \left[\frac{5 + (3n + 2)}{2} \right] n \Rightarrow S_n = \left(\frac{3n + 7}{2} \right) n \\ \therefore S_n &= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n \end{aligned}$$

Rpta.: C

Resolución 10: Sea la progresión:

$$a_1, a_2, a_3$$

Según la definición:

$$a_1, a_1 + r, a_1 + 2r$$

Por condición:

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) &= 24 \\ 3a_1 + 3r &= 24 \Rightarrow a_1 + r = 8 \end{aligned}$$

De donde tenemos:

$$a_1 = 8 - r \dots \dots \dots (1)$$

Por condición:

$$a_1^2 + (a_1 + r)^2 + (a_1 + 2r)^2 = 242$$

Con el auxilio de (1) tenemos:

$$\begin{aligned} (8 - r)^2 + (8)^2 + (8 + r)^2 &= 242 \\ 64 - 16r + r^2 + 64 + 64 + 16r + r^2 &= 242 \\ 192 + 2r^2 &= 242 \Rightarrow 2r^2 = 50 \\ r^2 &= 25 \Leftrightarrow r = 5 \vee r = -5 \end{aligned}$$

Como la progresión es creciente; sólo se acepta:

$$r = 5$$

Ahora en la relación (1) hallaremos el valor de a_1 ; veamos:

$$a_1 = 8 - r \Rightarrow a_1 = 8 - 5 \Rightarrow a_1 = 3$$

Finalmente tenemos:

$$a_3 = a_1 + 2r = 3 + 2(5)$$

$$\therefore a_3 = 13$$

Rpta.: C

Resolución 11:

Para encontrar el término onceavo es necesario conocer a la razón; para luego utilizar la propiedad del término general, veamos:

$$q = \text{razón} = \frac{6}{3} \Rightarrow q = 2$$

Por término general:

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

Donde en nuestro caso:

$$n = 11; T_1 = 3 \wedge q = 2$$

$$\Rightarrow t_{11} = 3(2)^{10} = 3(1024)$$

$$\therefore T_{11} = 3072$$

Rpta.: A

Resolución 12:

Por condición:

$$\Leftrightarrow 5 : 9 (3x - 1)$$

Por la propiedad de la razón se cumple:

$$\frac{9}{5} = \frac{3x-1}{9} \Rightarrow 81 = 15x - 5$$

$$81 + 5 = 15x \Rightarrow 15x = 86$$

$$\therefore x = \frac{86}{15}$$

Rpta.: D

Resolución 13: Por la propiedad de la razón:

$$\frac{3x}{4} = \frac{9x}{3x} = q$$

Observar que $x \neq 0$; luego:

$$\frac{3x}{4} = 3 = q$$

Por el término general:

$$t_n = t_1 q^{n-1} \Rightarrow t_6 = 4(3)^5 = 4(243)$$

$$\therefore t_6 = 972$$

Rpta.: B

Resolución 14: Sea la progresión:

$$\therefore t_1 : t_2 : t_3$$

$$\therefore t_1 : t_1 q : t_1 q^2$$

Por condición:

$$t_1 + t_1 q + t_1 q^2 = 35 \Rightarrow$$

$$t_1(1 + q + q^2) = 35 \dots (1)$$

$$t_1(t_1 q)(t_1 q^2) = 1000 \Rightarrow$$

$$(t_1 q)^3 = 1000$$

$$t_1 q = 10 \dots \dots \dots (2)$$

Dividiendo (1) + (2):

$$\frac{t_1(1 + q + q^2)}{t_1 q} = \frac{35}{10}$$

Simplificando tenemos:

$$\frac{1 + q + q^2}{q} = \frac{7}{2}$$

$$2 + 2q + 2q^2 = 7q$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

Factorizando se consigue:

$$(2q - 1)(q - 2) = 0$$

De donde obtenemos:

$$2q - 1 = 0 \vee q - 2 = 0 \Rightarrow q = 1/2 \vee q = 2$$

Como la progresión es decreciente sólo se considera:

$$q = \frac{1}{2}$$

Ahora en (2) obtenemos t_1 ; veamos:

$$t_1 q = 10 \Rightarrow t_1(1/2) = 10$$

$$t_1 = 2 \cdot 10 \Rightarrow t_1 = 20$$

Como:

$$t_2 = t_1 q \Rightarrow t_2 = 10$$

$$t_3 = t_1 q^2 \Rightarrow t_3 = 5$$

Finalmente la PG. será:

$$\Rightarrow 20 : 10 : 5$$

$$\therefore \text{menor término} = t_3 = 5$$

Rpta.: C

Resolución 15: La progresión es:

$$\Rightarrow t_1 : t_2 : t_3$$

$$\Rightarrow t_1 : t_1 q : t_1 q^2$$

Por condición:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = 1 \dots \dots (1)$$

$$t_1(t_1 q)(t_1 q^2) = 1$$

$$(t_1 q)^3 = 1 \Rightarrow t_1 q = 1$$

Pero observa que:

$$t_2 = t_1 q \Rightarrow t_2 = 1 \dots \dots (2)$$

Por condición:

$$t_3 = 2t_2 \Rightarrow t_3 = 2 \dots \dots (3)$$

Finalmente reemplazando (2) y (3) en (1) conseguimos el valor de t_1 ; veamos:

$$t_1(1)(2) = 1 \Rightarrow 2t_1 = 1$$

$$\therefore t_1 = 1/2$$

Rpta.: B

Resolución 16: Una rápida inspección permite observar que estamos frente a la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón es q donde:

$$q = \frac{1}{4} = \frac{1/4}{1} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4}$$

finalmente por suma límite tenemos:

$$S_{\text{Lim}} = \frac{t_1}{1-q}; -1 < q < 1$$

Donde:

$$t_1 = 4 \wedge q = \frac{1}{4}$$

$$S_{\text{Lim}} = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore S_{\text{Lim}} = 16/3$$

Rpta.: D

Resolución 17: De acuerdo con el enunciado se plantea:

$$\div 8 : \underbrace{\dots\dots\dots}_{6 \text{ términos}} : 1024$$

Teniendo en cuenta a lo expuesto en la teoría; la razón de interpolación viene dada por:

$$q = 6 + 1 \sqrt[6]{\frac{1024}{8}} = \sqrt[6]{128}$$

$$q = \sqrt[6]{2^7}$$

$$\therefore q = 2$$

Rpta.: A

Resolución 18: Por condición del problema:

$$S_6 = 9S_3$$

Por la propiedad de la suma:

$$t_1 \left(\frac{q^6 - 1}{q - 1} \right) = 9t_1 \left(\frac{q^3 - 1}{q - 1} \right)$$

Simplificando tenemos:

$$q^6 - 1 = q(q^3 - 1)$$

$$(q^3 + 1)(q^3 - 1) = 9(q^3 - 1)$$

$$\text{como } q \neq 1 \wedge q \neq 0 \dots\dots (\text{item 20.4B})$$

$$\Rightarrow q^3 + 1 = 9 \Rightarrow q^3 = 8$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{8}$$

$$\therefore q = 2$$

Rpta.: A

Resolución 19: Sea la progresión geométrica de "n" términos:

$$++ t_1 : t_2 : t_3 : \dots : t_n$$

$$++ t_1 : 2t_1 : 2^2 t_1 : \dots : 2^{n-1} t_1$$

Por condición:

$$t_1 \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = 189$$

$$\Rightarrow t_1 (2^n - 1) = 189 \dots \dots (1)$$

También por condición:

$$(t_1)^2 + (t_2)^2 + (t_3)^2 + \dots + (t_n)^2 = 12285$$

$$(t_1)^2 + (2t_1)^2 + (2^2 t_1)^2 + \dots + (2^{n-1} t_1)^2 = 12285$$

$$t_1^2 + 4t_1^2 + 4^2 t_1^2 + \dots + 4^{n-1} t_1^2 = 12285$$

En verdad se tiene:

$$t_1^2 \cdot \left(\frac{4^n - 1}{4 - 1} \right) = 12285$$

$$\Rightarrow t_1^2 (4^n - 1) = 3.12285 \dots \dots (2)$$

Elevando a ambos miembros de la relación (1) al cuadrado conseguimos lo siguiente:

$$t_1^2 (2^n - 1)^2 = 189.189 \dots \dots (3)$$

Ahora al dividir (2) y (3) obtenemos:

$$\frac{t_1^2 (4^n - 1)}{t_1^2 (2^n - 1)^2} = \frac{3.12285}{189.189}$$

Simplificando tenemos:

$$\frac{4^n - 1}{(2^n - 1)^2} = \frac{65}{63}$$

Transformando obtenemos:

$$\frac{2^{2n} - 1}{(2^n - 1)^2} = \frac{65}{63}$$

$$\frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{(2^n - 1)^2} = \frac{65}{63}$$

$$\frac{2^n + 1}{2^n - 1} = \frac{65}{63}$$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{2 \cdot 2^n}{2} = \frac{128}{2}$$

$$2^n = 64$$

$$n = 6$$

Rpta.: B

Resolución 20: Sea "a" el término central de la P.A., si dicha P.A. tiene razón "r"; los términos extremos serán $a - r$ y $a + r$; es decir la P.A. será:

$$: a - r . a . \underline{a + r}$$

↓
último término

Por condición:

$$(a - r) + (a) + (a + r) = 21$$

$$3a = 21 \Rightarrow a = 7$$

Ahora los números son:

$$7 - r ; 7 ; 7 + r$$

Por condición al aumentar 2, 3 y 9 a cada número respectivamente se forman una PG, veamos:

$$7 + 2 : 7 + 3 : 7 + 9$$

Ahora se cumple:

$$\frac{10}{9 - r} = \frac{16 + r}{10}$$

Efectuando tenemos:

$$10 \cdot 10 = (9 - r)(16 + r)$$

$$100 = 144 - 7r - r^2$$

$$r^2 + 7r - 44 = 0$$

Factorizando tenemos:

$$(r - 4)(r + 11) = 0$$

De donde se consigue:

$$r - 4 = 0 \vee r + 11 = 0$$

$$\Rightarrow r = 4 \vee r = -11$$

Como los tres números que forman la P.A. deben ser positivos (condición) sólo se acepta:

$$r = 4$$

Finalmente el último término es:

$$a_3 = a + r = 7 + 4$$

$$\therefore a_3 = 11$$

Rpta.: C

Resolución 21: Sea la progresión geométrica:

$$:: \underline{a : b : c : \dots : x}$$

"n" términos

$$:: a : aq : aq^2 : \dots : aq^{n-1}$$

Observar que:

$$b = aq \dots (1)$$

La suma de los "n" términos viene dado por:

$$S_n = a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

Ahora la suma de los $(n - 1)$ primeros términos será:

$$S_{n-1} = a \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right)$$

Por condición:

$$a \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right) = 252 \dots\dots (2)$$

Asimismo la suma de los $(n - 1)$ últimos términos será:

$$S_{n-1} = b \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right)$$

Por condición:

$$b \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right) = 504 \dots\dots (3)$$

Dividiendo (3) ; (2):

$$\frac{b}{a} = \frac{504}{252} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a$$

Finalmente de (1):

$$b = aq \rightarrow aq = 2a$$

$$\therefore q = 2$$

Rpta.: A

Resolución 22:

Si a_n es el término general de la P.A. dada; este se calcule según la relación:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Donde:

$$a_1 = 3 \wedge r = 8 - 3 \rightarrow r = 5$$

Luego se tiene:

$$a_n = 3 + (n - 1)5 = 3 + 5n - 5$$

$$\therefore a_n = 5n - 2$$

Rpta.: B

Resolución 23:

Sea la P.A. :

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots\dots a_n$$

Por teoría:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots a_n \dots\dots (1)$$

Por condición:

$$S_n = 4n^2 + n$$

Notar que:

$$S_1 = 4(1)^2 + 1 \rightarrow S_1 = 5$$

De (1):

$$S_1 = a_1 \rightarrow a_1 = 5$$

También:

$$S_2 = 4(2)^2 + 2 \rightarrow S_2 = 18$$

De (1):

$$S_2 = a_1 + a_2$$

Es decir:

$$18 = 5 + a_2 \rightarrow a_2 = 13$$

Finalmente podemos observar que la razón "r" viene dada por:

$$r = a_2 - a_1 \rightarrow r = 13 - 5$$

$$\therefore r = 8$$

Rpta.: D

Resolución 24:

Mediante una inspección minuciosa de la serie dada podemos notar que estamos frente a la suma de los términos de una PA. donde:

$$\text{Primer término} = a_1 = 5$$

$$\text{Último término} = a_n = 4n + 1$$

$$\text{Número de términos} = n$$

luego de acuerdo con lo expuesto en la teoría, podemos utilizar la siguiente relación:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

Es decir:

$$S_n = \left[\frac{5 + (4n + 1)}{2} \right] n$$

$$n = \left(\frac{4n + 6}{2} \right) n$$

$$S_n = (2n + 3)n$$

$$S_n = 2n^2 + 3n$$

Rpta.: C

Resolución 25:

De acuerdo con el enunciado estamos frente a una PA cuya razón "r" se calcula así:

$$r = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{1}{4}$$

Se pide el onceavo término es decir:

$$a_{11}$$

De acuerdo con lo expuesto en el ítem 30.3B tenemos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Donde:

$$n = 11; a_1 = \frac{1}{2} \wedge r = \frac{1}{4}$$

luego:

$$a_{11} = \frac{1}{2} + (11-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$$

$$\therefore a_{11} = 3$$

Rpta.: C

Resolución 26:

De acuerdo con el enunciado se pide:

$$a_1, r, \dots \dots \dots (1)$$

Por dato:

$$a_{10} = 24; n = 10 \wedge S_{10} = 105 \dots (1)$$

Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1)r$$

$$24 = a_1 + 9r \dots \dots \dots (2)$$

También:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

$$S_{10} = \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2} \right) 10$$

$$105 = (a_1 + 24) \cdot 5$$

$$21 = a_1 + 24 \rightarrow a_1 = -3 \dots \dots (3)$$

Reemplazando (3) en (2) conseguimos:

$$24 = -3 + 9r \rightarrow r = 3$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$a_1, r = (-3)(3)$$

$$\therefore a_1, r = -9$$

Rpta.: D

Resolución 27:

Teniendo en cuenta a lo expuesto en la teoría, la razón de la interpolación "r" viene dada por:

$$r = \frac{b-a}{m+1} \dots \dots \dots (1)$$

Donde:

$$a = \text{Primer término} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = \text{último término} \rightarrow b = \frac{3}{4}$$

m = Números de medios a interpolar

Ahora reemplazando los datos en (1) conseguimos:

$$\frac{1}{64} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{m+1} = \frac{1}{4(m+1)}$$

$$4(m+1) = 64 \rightarrow m+1 = 16$$

$$\therefore m = 15$$

Rpta.: C

Resolución 28: Sean a_k y a_{k+1} los términos consecutivos que menciona el problema; luego por condición:

$$(a_{k+1})^2 - (a_k)^2 = 440 \dots \dots \dots (1)$$

Sabemos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

luego en (1) se tendrá:

$$[a_1 + (k+1-1)r]^2 - [a_1 + (k-1)r]^2 = 440$$

De la sucesión:

$$a_1 = 5 \wedge r = 4$$

luego:

$$[5 + (k)4]^2 - [5 + (k-1)4]^2 = 440$$

$$(4k+5)^2 - (4k+1)^2 = 440$$

$$(8k+6)(4) = 440 \rightarrow 8k+6 = 110$$

$$8k = 104 \rightarrow k = 13$$

Finalmente los lugares son:

$$13 \wedge 14$$

Rpta.: A

Resolución 29: Consideremos la siguiente P.A. de "n" términos:

$$: a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \dots \dots a_n$$

Por condición:

$$a_7 = 80\% a_3 \rightarrow a_7 = \frac{4}{5} a_3 \dots \dots (1)$$

$$(a_7)(a_3) = 80 \dots \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$\left(\frac{4}{5}a_3\right)(a_3) = 80 \rightarrow (a_3)^2 = 100$$

De donde:

$$a_3 = 10 \vee a_3 = -10 \dots\dots\dots (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\text{Si: } a_3 = 10 \rightarrow a_7 = 8 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Si: } a_3 = -10 \rightarrow a_7 = -8 \dots\dots\dots (5)$$

Por condición la P.A. es decreciente; luego solo es válido (4)

Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Sea:

$$n = 3 \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

Sea:

$$n = 7 \rightarrow a_7 = a_1 + 6r \dots\dots\dots (6)$$

Reemplazando (4) en (6) conseguimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 10 \\ a_1 + 6r = 8 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene:

$$a_1 = 11 \wedge r = -\frac{1}{2}$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría la suma de los "n" primeros términos de una P.A. ; se puede calcular así:

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \right] n$$

Ahora reemplazando datos conseguimos:

$$50 = \left[\frac{2(11) + (n-1)(-1/2)}{2} \right] n$$

$$100 = \left(22 - \frac{n-1}{2} \right) n$$

$$200 = 44n - n^2 + n$$

$$n^2 - 45n + 200 = 0$$

$$(n-5)(n-40) = 0 \rightarrow n = 5 \vee n = 40$$

Como en el problema se menciona al séptimo término:

$$n \geq 7$$

$$\therefore n = 40$$

Rpta.: B

Resolución 30: Sea a_n el n -ésimo término de la primera sucesión aritmética, luego:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \rightarrow$$

$$a_n = 2 + (n-1)2 \rightarrow a_n = 2n \dots (1)$$

Sea b_n el n -ésimo término de la segunda sucesión aritmética, luego:

$$b_n = b_1 + (n-1)r \rightarrow$$

$$b_n = 3 + (n-1)3 \rightarrow b_n = 3n \dots (2)$$

Por condición:

$$(a_n)(b_n) = 216$$

con (1) y (2):

$$(2n)(3n) = 216 \rightarrow 6n^2 = 216$$

De donde:

$$n^2 = 216 \rightarrow n = 6$$

Ahora en (1):

$$a_6 = 12$$

También en (2):

$$b_6 = 18$$

Finalmente tenemos:

$$a_6 + b_6 = 12 + 18$$

$$\therefore a_6 + b_6 = 30$$

Rpta.: B

Resolución 31: De acuerdo con lo expuesto en la teoría debemos recordar que los recíprocos de los términos dados forman una P.A. veamos:

$$: \frac{5}{2} \cdot (2m-1) \cdot \frac{4}{5}$$

Luego por la propiedad de la razón tenemos:

$$(2m-1) - \frac{5}{2} = \frac{4}{5} - (2m-1)$$

$$(2m-1) + (2m-1) = \frac{4}{5} + \frac{5}{2}$$

$$4m - 2 = \frac{33}{10} \rightarrow 4m = \frac{33}{10} + 2 \rightarrow 4m = \frac{53}{10}$$

$$\therefore m = \frac{53}{40}$$

Rpta.: D

Resolución 32: Sea t_n el término general; luego según lo expuesto en la teoría tenemos:

$$t_n = t_1 q^{n-1} \dots \dots \dots (1)$$

De la sucesión notamos que:

$$q = \frac{8}{2} \rightarrow q = 4 \wedge t_1 = 2 \dots \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$t_n = 2 \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 2^{2n-2}$$

$$\therefore t_n = 2^{2n-1}$$

Rpta.: D

Resolución 33: Examinando cuidadosamente a los términos de la serie dada; podemos notar que se trata de la suma límite de una PG. de infinitos términos cuya razón es:

$$q = \frac{0,04}{0,2} = 0,2 = \frac{1}{5}$$

Se sabe que:

$$S_{\text{lím}} = \frac{t_1}{1-q}$$

De donde tenemos:

$$S_{\text{lím}} = \frac{0,2}{1-0,2} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}$$

$$\therefore S_{\text{lím}} = \frac{1}{4}$$

Rpta.: B

Resolución 34: Podemos notar que:

$$t_1 = 3 \wedge t_7 = 192 \dots \dots \dots (1)$$

Sabemos que:

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

Sea $n = 7$:

$$t_7 = t_1 q^6$$

Utilizando (1):

$$192 = 3q^6$$

$$64 = q^6 \rightarrow q = 2$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría la suma de los "n" primeros términos de una PG. viene dada por:

$$S_n = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

Con lo cual tenemos:

$$S_7 = 3 \left(\frac{2^7 - 1}{2 - 1} \right) = 3(127)$$

$$\therefore S_7 = 381$$

Rpta.: E

Resolución 35: Por ser PG.:

$$\div a : b : c : d$$

Sea:

$$q = \text{razón} \rightarrow b = aq$$

$$c = aq^2 \wedge d = aq^3$$

Por condición:

$$a - d = 7 \rightarrow a - aq^3 = 7 \dots \dots (1)$$

Se pide:

$$w = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$$

Es decir:

$$w = (a - aq^2)^2 + (aq - aq^2)^2 + (aq - aq^3)^2$$

Desarrollando cada potencia tenemos:

$$w = a^2 - 2a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^4 - 2a^2q^3 + a^2q^4 + a^2q^4 - 2a^2q^4 + a^2q^6$$

Reduciendo los términos señalados tenemos:

$$w = a^2 - 2a^2q^3 + a^2q^6$$

Notar que:

$$w = (a - aq^3)^2 \dots \dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$w = (7)^2$$

$$\therefore w = 49$$

Rpta.: D

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 12

Resolución 36: Sea la P.G.:

$$++ t_1 : t_2 : t_3 : t_4 : t_5$$

Donde:

$$t_1 = ab \wedge t_5 = \frac{a}{b} \dots\dots (1)$$

Siendo los medios proporcionales:

$$t_2 : t_3 \wedge t_4$$

Se sabe que:

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

Si $n = 5$:

$$t_5 = t_1 q^4$$

Utilizando (1) tenemos:

$$\frac{a}{b} = abq^4 \rightarrow q^4 = \frac{1}{b^2}$$

$$\rightarrow q^2 = \frac{1}{b} \dots\dots (2)$$

Se pide t_3 , es decir:

$$t_3 = t_1 q^2$$

Finalmente con (1) y (2) conseguimos:

$$t_3 = (ab) \cdot \frac{1}{b}$$

$$\therefore t_3 = a$$

Rpta.: E**Resolución 37:** Sea la P.G.:

$$++ t_1 : t_1 q : t_1 q^2 : t_1 q^3$$

Por condición:

$$t_1 + t_1 q = 1 \rightarrow t_1(1 + q) = 1 \dots\dots (1)$$

$$t_1 q^2 + t_1 q^3 = 16 \rightarrow t_1 q^2(1 + q) = 16 \dots\dots (2)$$

Si se divide (2) entre (1) se consigue:

$$\frac{t_1 q^2(1+q)}{t_1(1+q)} = \frac{16}{1} \rightarrow q^2 = 16 \rightarrow q = 4 \dots\dots (3)$$

Reemplazando (3) en (1) tenemos:

$$t_1(5) = 1 \rightarrow t_1 = \frac{1}{5}$$

Finalmente la P.G. es:

$$++ \frac{1}{5} : \frac{4}{5} : \frac{16}{5} : \frac{64}{5}$$

Rpta.: A

Resolución 38: Sean los términos t_k y t_{k+1}

Se sabe que:

$$t_n = t_1 q^{n-1} \dots \dots \dots (1)$$

De la P.G. notamos que:

$$t_1 = 7 \wedge q = 3$$

En (1) hagamos:

$$n = k$$

$$t_k = t_1 q^{k-1}$$

Es decir:

$$t_k = 7 \cdot 3^{k-1} \dots \dots \dots (2)$$

En (1) hagamos:

$$n = k + 1$$

$$t_{k+1} = t_1 q^k$$

Es decir:

$$t_{k+1} = 7 \cdot 3^k \dots \dots \dots (3)$$

Por condición:

$$t_k + t_{k+1} = 2268 \dots (4)$$

Reemplazando tenemos (2) y (3) en (4) tenemos:

$$7 \cdot 3^{k-1} + 7 \cdot 3^k = 2268$$

$$3^{k-1}(7 + 7 \cdot 3) = 2268$$

$$3^{k-1} \cdot 28 = 2268 \rightarrow 3^{k-1} = 81$$

De donde conseguimos:

$$k = 5$$

Finalmente en (2) y (3) obtenemos:

$$t_5 = 7 \cdot 81 \rightarrow t_5 = 567$$

$$t_6 = 7 \cdot 243 \rightarrow t_6 = 1701$$

Rpta.: A

Resolución 39: Sea la P.G.:

$$\div t_1 : t_1 q : t_1 q^2 : t_1 q^3 : t_1 q^4 : t_1 q^5$$

Por condición:

$$S_6 = 364$$

Por propiedad:

$$S_6 = t_1 \left(\frac{q^6 - 1}{q - 1} \right) \rightarrow t_1 \left(\frac{q^6 - 1}{q - 1} \right) = 364 \dots (1)$$

Por condición:

$$t_4 - t_3 = 6t_2$$

Es decir:

$$t_1 q^3 - t_1 q^2 = 6t_1 q$$

$$t_1 q(q^2 - q) = 6t_1 q$$

Simplificando:

$$q^2 - q = 6 \rightarrow q^2 - q - 6 = 0$$

$$(q - 3)(q + 2) = 0 \rightarrow q = 3 \vee q = -2$$

Si: $q = 3$; en (1):

$$t_1 \cdot \left(\frac{728}{2}\right) = 364 \rightarrow t_1 = 1$$

Si: $q = -2$; en (1):

$$t_1 \cdot \left(\frac{63}{-3}\right) = 364 \rightarrow t_1 = \frac{-52}{3}$$

$$\therefore t_1 = 1 \vee t_1 = -\frac{52}{3}$$

Rpta.: A**Resolución 40:**

Teniendo en cuenta a lo expuesto en la teoría tenemos:

$$P_n = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

En el problema:

$$t_1 = 1; t_n = 2 \wedge n = 24$$

Luego:

$$P_{26} = \sqrt{(1 \cdot 2)^{24}} = 2^{12}$$

$$\therefore P_{26} = 4096$$

Rpta.: D**Resolución 41:**

De acuerdo con lo expuesto en la teoría el enunciado de este problema nos sugiere formar dos PG.; veamos:

$$\div t_1 : 2t_1 : 2^2 t_1 : \dots : 2^{n-1} t_1 \dots \dots (1)$$

$$\div t_1^2 : 4t_1^2 : 4^2 t_1^2 : \dots : 4^{n-1} t_1^2 \dots \dots (2)$$

Por condición se plantea para (1):

$$t_1 \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = 189$$

$$\rightarrow t_1 \cdot (2^n - 1) = 189 \dots \dots (3)$$

Por condición se plantea para (2):

$$t_1^2 \left(\frac{4^n - 1}{4 - 1} \right) = 12285$$

$$\rightarrow t_1^2 = (4^n - 1) = 3 \cdot 12285 \dots \dots (4)$$

Elevamos a a_m de (3) al cuadrado:

$$t_1^2 (2^n - 1)^2 = 189 \cdot 189 \dots \dots (5)$$

Si se divide (4) entre (5) conseguimos:

$$\frac{t_1^2 (4^n - 1)}{t_1^2 (2^n - 1)^2} = \frac{3.12285}{189.189}$$

$$\frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{(2^n - 1)} = \frac{65}{63} \rightarrow \frac{2^n + 1}{2^n - 1} = \frac{65}{63}$$

De donde:

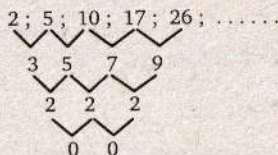
$$2^n = 64$$

$$\therefore n = 6$$

Rpta.: B

Resolución 42:

Examinando cuidadosamente a la sucesión dada podemos notar que estamos frente a una P.O.S



Observa que:

$$a_1 = 2; {}^1\Delta_1 = 3; {}^2\Delta_1 = 2 \wedge {}^3\Delta_1 = 0$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría el término de lugar "n", viene dado por:

$$a_n = a_1 + {}^1\Delta_1 C_1^{n-1} + {}^2\Delta_1 C_2^{n-1} + {}^3\Delta_1 C_3^{n-1}$$

Como se pide el vigésimo término; $n=20$:

$$a_{20} = 2 + 3C_1^{19} + 2C_2^{19} + 0C_3^{19}$$

$$a_{20} = 2 + 3 \cdot 19 + 19 \cdot 18 + 0$$

$$\therefore a_{20} = 401$$

Rpta.: C

Resolución 43: En la P.O.S. Se pide a_n luego procederemos así:

$$\begin{array}{rcl}
 & 1; 5; 11; 19; \dots & \text{notar que:} \\
 {}^1\Delta_1 \rightarrow & 4 & 6 & 8 & a_1 = 1 \\
 {}^2\Delta_1 \rightarrow & & 2 & 2 \\
 {}^3\Delta_1 \rightarrow & & & 0
 \end{array}$$

Finalmente a_n viene dado por:

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + {}^1\Delta_1 C_1^{n-1} + {}^2\Delta_1 C_2^{n-1} + {}^3\Delta_1 C_3^{n-1} \\
 a_n &= 1 + 4C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1} + 0C_3^{n-1} \\
 a_n &= 1 + 4(n-1) + (n-1)(n-2) + 0 \\
 a_n &= 1 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2 \\
 \therefore a_n &= n^2 + n - 1
 \end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 44: La P.O.S es:

$$1; 5; 11; 19; \dots$$

Notar que:

$$a_1 = 1; {}^1\Delta_1 = 4; {}^2\Delta_1 = 2 \wedge {}^3\Delta_1 = 0$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría la suma de los "n" primeros términos; se calcula así:

$$S_n = a_1 C_1^n + {}^1\Delta_1 C_2^n + {}^2\Delta_1 C_3^n + {}^3\Delta_1 C_4^n$$

Luego en el problema:

$$S_8 = 1.C_1^8 + 4.C_2^8 + 2.C_3^8 + 0.C_4^8$$

$$S_8 = 8 + 12 + 112$$

$$\therefore S_8 = 232$$

Rpta.: E

Resolución 45: De la sucesión:

$$a_n = n(n+1)(n+2)$$

$$a_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)$$

Notar que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{n} \dots \dots \dots (1)$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría.

Si la sucesión dada es Hipergeométrica; se debe cumplir que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}; \alpha \neq 0 \dots\dots (2)$$

De (1) y (2) mediante una comparación podemos observar que:

$$\alpha = 1; \beta = 3 \wedge \gamma = 0$$

$\therefore$ Como $\alpha \neq 0$; la sucesión dada es Hipergeométrica

Resolución 46: La sucesión dada es:

$$1 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 4, 3 \cdot 4 \cdot 5, \dots, k(k+1)(k+2)$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría, la suma de los "n" primeros términos viene dado por:

$$S_n = \frac{(n\alpha + \beta)a_n - \gamma a_1}{\alpha + \beta - \gamma} \dots\dots (1)$$

Teniendo en cuenta al problema anterior:

$$\alpha = 1; \beta = 3; \gamma = 0; a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$\wedge a_n = n(n+1)(n+2)$$

finalmente en (1) conseguimos:

$$S_n = \frac{[n(1)+3]n(n+1)(n+2) - 0.6}{1+3-0}$$

$$S_n = \frac{(n+3)(n)(n+1)(n+2)}{4}$$

$$\therefore S_n = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{4}$$

Rpta.: B

Resolución 47: Tomamos los recíprocos de cada término de la PH; pues de ese modo se formará una PA.

$$: 7 \cdot 15 \cdot 23 \cdot 31 \dots\dots\dots$$

Notar que:

$$a_1 = 7 \wedge r = 8$$

Halleemos el término que ocupa la posición 210, es decir:

$$a_{210}$$

Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Sea $n = 210$:

$$a_{210} = a_1 + (209)r$$

$$a_{210} = 7 + (209)(8)$$

$$a_{210} = 1679$$

finalmente el término que ocupa la posición 210 en la PH es:

$$\frac{1}{1679}$$

Rpta.: A

Resolución 48:

Por condición se plantea:

$$: 3 \dots\dots\dots 30 \dots\dots\dots b$$

"m términos" "m términos"

Se sabe que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \dots\dots\dots (1)$$

En el primer tramo:

$$a_n = 30; a_1 = 3 \wedge n = m + 2$$

Ahora en (1):

$$30 = 3 + (m + 2 - 1)r \rightarrow (m + 1)r = 27 \dots\dots (2)$$

También:

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \right] n \dots\dots\dots (3)$$

En la PA :

$$a_1 = 3; n = 2m + 3 \wedge S_n = 570$$

Ahora en (3):

$$570 = \left[\frac{2(3) + (2m + 3 - 1)r}{2} \right] (2m + 3)$$

$$570 = [3 + (m + 1)r](2m + 3) \dots\dots\dots (4)$$

Reemplazando (2) en (4) tenemos:

$$570 = [3 + 27](2m + 3)$$

$$570 = 30(2m + 3) \rightarrow 19 = 2m + 3$$

De donde:

$$m = 8 \dots\dots\dots (5)$$

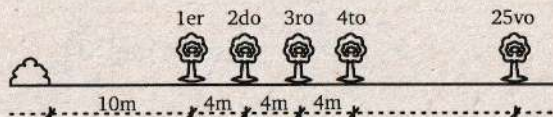
Finalmente (5) en (2):

$$(8 + 1)r = 27 \rightarrow 9r = 27$$

$$\therefore r = 3$$

Rpta.: B

Resolución 49: Ilustremos nuestro problema:



Recorrido para cada árbol:

	ida + vuelta = total	
1er árbol	10	20
2do árbol	14	28
3er árbol	18	36
...	...	...

Notamos que estamos frente a una PA donde tenemos.

$$a_1 = 20 \wedge r = 8$$

La distancia recorrida por la persona viene dada por la suma de los 25 primeros términos de la PA formada; veamos:

$$S_{25} = \left[\frac{2(20) + (25-1)(8)}{2} \right] \cdot 25$$

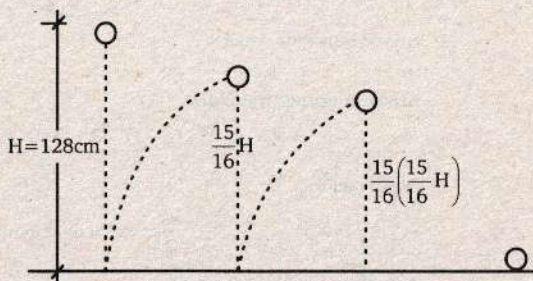
$$S_{25} = (20 + 4)25$$

$$S_{25} = 116 \cdot 25$$

$$S_{25} = 2900 \text{ m}$$

Rpta.: C

Resolución 50: Ilustramos el enunciado de nuestro problema:



Observar que la distancia recorrida por la pelota viene dada por:

$$D = H + 2 \left[\frac{15}{16} H + \frac{15}{16} \left(\frac{15}{16} H \right) + \frac{15}{16} \left(\frac{15}{16} \left(\frac{15}{16} H \right) \right) + \dots \right]$$

$$D = H + 2H \left[\frac{15}{16} + \left(\frac{15}{16} \right)^2 + \left(\frac{15}{16} \right)^3 + \dots \right]$$

De acuerdo con lo expuesto en la teoría, tenemos:

$$D = H + 2H \left[\frac{\frac{15}{16}}{1 - \frac{15}{16}} \right]$$

$$D = H + 2H \cdot (15) = H + 30H$$

$$D = 31H \text{ pero } H = 128$$

$$\therefore D = 3968 \text{ cm}$$

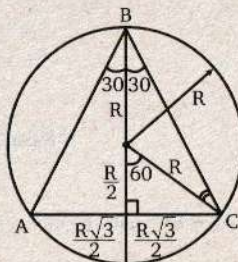
Rpta.: E

Resolución 51: Debemos tener en cuenta que el área de un círculo de radio "r" viene dado por πr^2 .

Además el área de un triángulo equilátero de lado "L" viene dado por:

$$\frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

Ahora con el auxilio de la geometría ilustremos nuestro enunciado.



Área del primer círculo:

$$\pi R^2$$

Área del primer triángulo:

$$\frac{(R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

Observación:

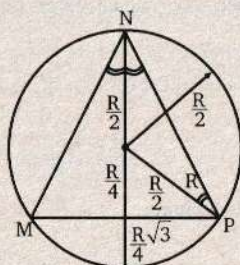
$\frac{R}{2}$ es radio del círculo inscrito en el triángulo ABC

Área del segundo círculo:

$$\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$

Área del segundo triángulo:

$$\frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} R^2}{16} = \frac{3\sqrt{3} R^2}{4^2}$$



Observación:

$\frac{R}{4}$ es radio del nuevo círculo inscrito en el triángulo MNP

Área del tercer círculo:

$$\pi \left(\frac{R}{4} \right)^2 = \frac{\pi R^2}{4^2}$$

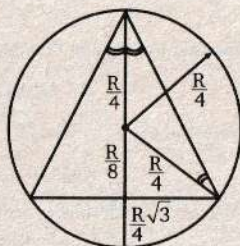
Área del segundo triángulo:

$$\frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{4} \right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{64} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4^3}$$

Sea, S_1 = Suma límite de las áreas formadas de todos los círculos, es decir:

$$S_1 = \pi R^2 + \frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{4^2} + \dots$$

$$S_1 = \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$



Por suma límite:

$$S_1 = \pi R^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \pi R^2 \left(\frac{4}{3} \right) \rightarrow S_1 = \frac{4\pi R^2}{3} \dots (1)$$

También, S_2 = Suma límite de las áreas formadas de todos los triángulos, es decir:

$$S_2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{3\sqrt{3}R^2}{4^2} + \frac{3\sqrt{3}R^2}{4^3} + \dots$$

$$S_2 = 3\sqrt{3}R^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right)$$

Por suma límite:

$$S_2 = 3\sqrt{3}R^2 \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 3\sqrt{3}R^2 \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\rightarrow S_2 = \sqrt{3}R^2 \dots \dots (2)$$

Finalmente se pide:

$$S_{\text{lim}} = S_1 + S_2$$

De (1) y (2):

$$S_{\text{Lim}} = \frac{4\pi R^2}{3} + \sqrt{3}R^2$$

$$\therefore S_{\text{Lim}} = \frac{R^2}{3} (4\pi + 3\sqrt{3})U^2$$

Rpta.: D

Resolución 52:

Para cada afirmación tenemos:

I. La sucesión es $\{a_n\} / a_n = \frac{n}{2n+1}$

$$\{a_n\} = \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{4}{9}; \dots; \frac{n}{2n+1}; \dots$$

Nótese que la sucesión es acotada inferiormente, siendo $\frac{1}{3}$ su cota inferior

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

II. La sucesión es $\{a_n\} / a_n = n^2$

$$\{a_n\} = 1; 4; 9; \dots; n^2; \dots$$

Nótese que la sucesión es acotada inferiormente, siendo 1 su cota inferior

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

III. La sucesión es $\{a_n\} / a_n = \frac{1}{n}$

$$\{a_n\} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$$

Nótese que $a_n \leq 1$, luego la sucesión es acotada superiormente

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

$\therefore$ Combinación correcta = V V V

Rpta.: C

Resolución 53:

Nótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$; $a_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1 \neq 0$ se afirma que:

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ es divergente

Rpta.: E

Resolución 54:

Para cada término de la sucesión tenemos:

$$0 = 0 - 0 = 0^3 - 0$$

$$0 = 1 - 1 = 1^3 - 0$$

$$6 = 8 - 2 = 2^3 - 2$$

$$24 = 27 - 3 = 3^3 - 3$$

$$60 = 64 - 4 = 4^3 - 4$$

$$120 = 125 - 5 = 5^3 - 5$$

$\vdots$

$$a_n = (n-1)^3 - (n-1)$$

Por condición se plantea:

$$(n-1)^3 - (n-1) = 1320$$

$$(n-1)[(n-1)^2 - 1] = 1320$$

$$n(n-1)(n-2) = 1320$$

$$\therefore n = 12$$

Rpta.: C

Resolución 55: Para cada término de la sucesión tenemos:

$$4 = \frac{4^1}{1} = \frac{4^1}{1!}$$

$$8 = \frac{16}{2} = \frac{4^2}{2} = \frac{4^2}{2!}$$

$$\frac{32}{3} = \frac{2^5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2^6}{6} = \frac{4^3}{3!}$$

$$\frac{32}{3} = \frac{2^5 \cdot 2^3}{3 \cdot 8} = \frac{2^8}{24} = \frac{4^4}{4!}$$

$$\frac{128}{15} = \frac{2^7 \cdot 2^3}{15 \cdot 8} = \frac{2^{10}}{120} = \frac{4^5}{5!}$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_n = \frac{4^n}{n!}$$

Rpta.: B

Resolución 56: La fórmula dada es:

$$x_{n+1} = x_n + 2 + \sqrt{9 + 8x_n}; x_0 = 0$$

Si $n = 0$:

$$x_1 = x_0 + 2 + \sqrt{9 + 8x_0} = 5$$

Si $n = 1$:

$$x_2 = x_1 + 2 + \sqrt{9 + 8x_1} = 14$$

Si $n = 2$:

$$x_3 = x_2 + 2 + \sqrt{9 + 8x_2} = 27$$

Si $n = 3$:

$$x_4 = x_3 + 2 + \sqrt{9 + 8x_3} = 44$$

$$\vdots$$

$$\{x_n\} = \{5; 14; 27; 44; \dots\}$$

Analizando los términos de la sucesión:

$$5; 14; 27; 44;$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & 9 & & 13 & & 17 & \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & \\ & 4 & & 4 & & & \end{array}$$

El n -ésimo término es:

$$\Rightarrow x_n = 5C_0^{n-1} + 9C_1^{n-1} + 4C_2^{n-1}$$

$$x_n = 5(1) + 9(n-1) + 2(n-1)(n-2)$$

$$x_n = n(2n+3)$$

Finalmente para $n = 2003$:

$$x_{2003} = 2003(4009)$$

$$\therefore \frac{x_{2003}}{2003} = 4009$$

Rpta.: A

Resolución 57: Nótese que el término n -ésimo de la sucesión es:

$$a_n = \frac{5n+1}{3n-1}$$

I. Si la sucesión es creciente, se cumple que $a_{n+1} > a_n$

$$\frac{5(n+1)+1}{3(n+1)-1} > \frac{5n+1}{3n-1}$$

$$(5n+6)(3n-1) > (3n+2)(5n+1)$$

$$15n^2 + 13n - 6 > 15n^2 + 13n + 2$$

$$-6 > 2 \text{ ¡Absurdo!}$$

$\Rightarrow$ la afirmación es falsa (F)

II. Como $a_n = \frac{5n+1}{3n-1}$, si $n = 81$:

$$a_{81} = \frac{5(81)+1}{3(81)-1} = \frac{406}{242} = \frac{203}{121}$$

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

III. Como $a_n = \frac{5n+1}{3n-1} \Leftrightarrow 3a_n = \frac{15n+3}{3n-1} \rightarrow 5 + \frac{8}{3n-1}$

Por condición:

$$1 \leq n < \infty$$

$$3 \leq 3n < \infty$$

$$2 \leq 3n-1 < \infty$$

$$0 < \frac{1}{3n-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{8}{3n-1} \leq 4$$

$$5 < 5 + \frac{8}{3n-1} \leq 9$$

$$5 < 3a_n \leq 9$$

$$\frac{5}{3} < a_n \leq 3 \text{ ¡Es acotada!}$$

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

IV. Como $a_n = \frac{5n+1}{3n-1}$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \frac{5}{3} \text{ !es convergente!}$$

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

$\therefore$ Combinación correcta FVVV

Rpta.: E

Resolución 58: En cada afirmación:

$$I. \left\{ \frac{(-1)^n}{2n^2+1} \right\} = \begin{cases} -\frac{1}{2n^2+1}; & n = \text{impar} \dots (1) \\ \frac{1}{2n^2+1}; & n = \text{par} \dots (2) \end{cases}$$

Nótese que (1) y (2) convergen a cero cuando $n \rightarrow \infty$, luego decimos que la sucesión es convergente y por tanto es acotada.

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

$$II. \{1 + (-1)^n\} = \{0; 2; 0; 2; \dots\}$$

Nótese que la sucesión no es alternante

$\Rightarrow$ la afirmación es falsa (F)

$$III. \text{ Si } \{a_n\}, \text{ con } a_n = \frac{n^3+2}{n^4+1}, \text{ es una sucesión decreciente verifica que } a_{n+1} < a_n$$

En efecto:

$$\frac{(n+1)^3+2}{(n+1)^4+1} < \frac{n^3+2}{n^4+1}; \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

$\therefore$ Combinación correcta = VFV

Rpta.: B

Resolución 59: En cada afirmación tenemos:

I. Si $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$ es creciente verifica que $a_{n+1} > a_n$

$$\frac{(n+1)^2}{n+2} > \frac{n^2}{n+1}$$

$$(n+1)^3 > n^2(n+2)$$

$$n^2 + 3n + 1 > 0; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

II. Si $\left\{ 1 + \frac{1}{2^n} \right\}$ es decreciente verifica que $a_{n+1} < a_n$

$$1 + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$2^n < 2^{n+1}$$

$$n < n+1$$

$$0 < 1 \text{ !Verdadero!}$$

Aquí notamos que la sucesión es decreciente.

Como $a_n = 1 + \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$, con lo cual

decimos que la sucesión es acotada

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

III. Redefiniendo la sucesión:

$$\left\{ (-2)^{n^2} \right\} = \begin{cases} -2^{n^2} & ; n = \text{impar} \dots (1) \\ 2^{n^2} & ; n = \text{par} \dots (2) \end{cases}$$

Nótese que cuando $n \rightarrow \infty$ (1) y (2) asumen $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente, luego la sucesión no es acotada

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

$\therefore$ Combinación correcta = VVV

Rpta.: B

Resolución 60: La sucesión dada es $\{a_n\}$, $a_n = \frac{10^n}{2^{n^2}}$

I. Veamos si es monótona:

$$a_n \oslash a_{n+1}$$

$$\frac{10^n}{2^{n^2}} \oslash \frac{10^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}$$

$$2^{2n+1} \oslash 10$$

$$2^{2n} \oslash 5$$

Nótese que si $n=1$, $\oslash$ es $<$; pero si $n \geq 2$ $\oslash$ es $>$.

Por tanto $\{a_n\}$ no es monótona.

$\Rightarrow$ El enunciado es falso (F)

* Veamos la convergencia, según la prueba de la razón.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10^{n+1}}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{10^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2^{2n}} \right) = 0 < 1$$

La sucesión es convergente y converge a cero.

II. Por teorema toda sucesión convergente es acotada.

$\Rightarrow$ El enunciado es verdadero

III. La sucesión es convergente y converge a cero.

El enunciado es verdadero.

$\therefore$ Combinación correcta = FVV

Rpta.: D

Resolución 61: Tener en cuenta que:

$$2^n \cdot n! = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_{\text{"n" veces}} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n)$$

$$2^n \cdot n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n)$$

Para el n -ésimo término:

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} = 0,500$$

$$x_2 = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$x_3 = \frac{5}{16} = 0,312$$

$$x_4 = \frac{35}{128} = 0,273$$

⋮

∴ $\{x_n\}$ es decreciente

Rpta.: D

Resolución 62: El término n -ésimo es:

$$a_n = \sqrt{an^2 + bn + c} - \sqrt{an}$$

$$a_n = \frac{bn + c}{\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an}}$$

Por términos dominantes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a)_n = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Por condición plantea:

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{a}{b\sqrt{2}}$$

$$b^2\sqrt{2} = 2a\sqrt{a}$$

$$b^4 \cdot 2 = 4a^3$$

$$\therefore b^4 = 2a^3$$

Rpta.: E

Resolución 63: Se tiene:

$$a_n = \frac{\text{Sen}(n!)}{n}$$

Se plantea:

$$-1 \leq \text{Sen}(n!) \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\text{Sen}(n!)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq 0$$

$$\text{Nótese } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

$\therefore$ la sucesión es convergente y converge a cero

Rpta.: A

Resolución 64: En cada afirmación tenemos:

I. La afirmación es falsa (F)

Por ejemplo:

$$\text{Si } a_n = \frac{3n+1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 3$$

Ahora observa que:

$$a_{n+3} = \frac{3n+10}{n+3}$$

$$a_{n+3} - 3 = \frac{3n+10}{n+3} - 3$$

$$a_{n+3} - 3 = \frac{1}{n+3} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+3} - 3) = 0$$

II. La afirmación es falsa (F)

Por ejemplo:

$$\text{Si } a_n = -5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |-5| = 5$$

Ahora observa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-5) \Rightarrow -\lim_{n \rightarrow \infty} (5) = -5$$

III. La afirmación es falsa (F)

Por ejemplo:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n^2+1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right) = 1$$

$$\text{pero } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n} \right) = \infty \text{ !No converge!}$$

$\therefore$ Combinación correcta = FFF

Rpta.: E

Resolución 65: Por condición:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

El término n -ésimo es:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} - an - b$$

$$a_n = \frac{n^2 + 1 - an^2 - (a + b)n - b}{n + 1}$$

$$a_n = \frac{(1 - a)n^2 - (a + b)n - (b + 1)}{n + 1}$$

Por condición se cumple que:

$$1 - a = 0 \wedge a + b = 0$$

$$a = 1 \wedge 1 + b = 0$$

$$a = 1 \wedge b = -1$$

$$\therefore ab = -1$$

Rpta.: B

Resolución 66: Se tiene $a_n = \frac{n^2}{5^n + 1}$ supongamos que $b_n = n^2$ y $C_n = 5^n + 1$:

$$a_n = \frac{b_n}{C_n} = \frac{n^2}{5^n + 1}$$

Por el criterio de Stolz - Césaro :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_{n+1} - b_n}{C_{n+1} - C_n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^2 - n^2}{5^{n+1} + 1 - (5^n + 1)} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 1}{4.5^n} \right)$$

Por el criterio de Stolz - Césaro :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(n+1) + 1 - 2n - 1}{4.5^{n+1} - 4.5^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{16.5^n} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{8.5^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \frac{1}{8} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n}_{\text{es cero}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

$\therefore$ la sucesión converge a cero

Rpta.: A

Resolución 67: En cada elemento de la sucesión:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{31}{30}\right)^{30} = \left(1 + \frac{1}{30}\right)^{30}$$

$$\left(\frac{69}{68}\right)^{68} = \left(1 + \frac{1}{68}\right)^{68}$$

$\vdots$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3 + n}\right)^{n^3 + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3 + n}\right)^{n^3 + n}$$

Nótese que si $n \rightarrow \infty$, entonces $n^3 + n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = e$$

$\therefore$ la sucesión converge a "e"

Rpta.: D

Resolución 68: En cada sucesión tenemos:

$$D) \{S_n\} = \begin{cases} S_{2k-1} = \frac{1}{k} \dots\dots (1) \\ S_{2k} = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

Nótese que cuando $k \rightarrow \infty$, (1) y (2) tienen por límite cero (son iguales)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = 0$$

$$\text{II) } \{p_n\} = \begin{cases} p_{2k-1} = \frac{1}{k} \dots\dots (1) \\ p_{2k} = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

Nótese que cuando $k \rightarrow \infty$ en (1) se obtiene

0 y en (2) se obtiene 1 (son diferentes)

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n)$ no existe

Rpta.: E

Resolución 69: En cada sucesión tenemos:

$$\text{I. } b_{n+1} = b_n + 4 ; b_1 = 5$$

$$\Rightarrow b_n = 5 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 1$$

$$\text{II. } C_{n+1} = -3C_n ; C_1 = 5$$

$$\Rightarrow C_n = 5(-3)^{n-1}$$

$$\text{III. } a_n = \frac{b_n}{C_n} = \frac{4n+1}{5(-3)^{n-1}}$$

Según la prueba de la razón:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n+5}{5(-3)^n} \cdot \frac{5(-3)^{n-1}}{4n+1} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n+5}{-12n-3} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n+5}{12n+3} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} < 1$$

Aquí reconocemos que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y converge a cero.

Finalmente tenemos:

I (V) ; II (F) ; III (V)

Rpta.: D

Resolución 70: Se tiene:

I. $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

II. $b_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2^n}$

Por condición tenemos:

$$|a_n - b_n| < 10^{-6}$$

$$\left| 1 + \frac{1}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n} \right| < \frac{1}{10^6}$$

$$\left| \frac{2}{2^n} \right| < \frac{1}{10^6}$$

$$\frac{2}{2^n} < \frac{1}{10^6}$$

$$10^6 < \frac{2^n}{2}$$

En la forma equivalente: $2^{n-1} > 2^6 \cdot 5^6$

$$2^{n-7} > 5^6$$

$$2^{n-7} > 15625$$

Aquí reconocemos que: $n - 7 > 13$

$$n > 20$$

$$\therefore n \text{ (mínimo)} = 21$$

Rpta.: C**Resolución 71:** Los intervalos dados son:

$$I_n = \left[0; \frac{1}{n} \right]$$

$$J_n = \left\langle 0; \frac{1}{n} \right\rangle$$

$$K_n = \langle n; \infty \rangle$$

I. $\exists x > 0 \mid x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Observa que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0; 1] \cap \left[0; \frac{1}{2} \right] \cap \left[0; \frac{1}{3} \right] \cap \dots \cap [0; 0]$$

El único elemento común es el cero

 $\Rightarrow$ la proposición es falsa (F).

Por condición:

$$\text{II. } \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \phi$$

Observa que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4 \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \langle 0; 1 \rangle \cap \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle \cap \left\langle 0; \frac{1}{3} \right\rangle \cap \dots \cap \underbrace{\langle 0; 0 \rangle}_{\phi}$$

Finalmente la intersección es el vacío
 $\Rightarrow$ la proposición es verdadera (V).

$$\text{III. } \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \phi$$

Observa que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4 \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \langle 1; \infty \rangle \cap \langle 2; \infty \rangle \cap \langle 3; \infty \rangle \cap \dots \cap \langle \infty; \infty \rangle$$

Como $\infty \notin \mathbb{R}$ el conjunto $\langle \infty; \infty \rangle$ puede tener algún elemento.
 $\Rightarrow$ la proposición es falsa (F).

Rpta.: A

Resolución 72: En el proceso del límite se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L$$

Por condición tenemos:

$$L = \sqrt[3]{6 + 7L}$$

$$L^3 - 7L = 6$$

$$L(L^2 - 7) = 3 \cdot 2$$

$$L(L^2 - 7) = 3(3^2 - 7)$$

$$\therefore L = 3$$

Rpta.: C

Resolución 73: Se tiene:

$$S = \sum_{n=1}^{100} \left[\frac{1}{(n+3)(n+5)} \right]$$

$$2S = \sum_{n=1}^{100} \left[\frac{2}{(n+3)(n+5)} \right]$$

$$2S = \sum_{n=1}^{100} \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+5} \right]$$

Reescribiendo en el paréntesis con la finalidad de utilizar la propiedad telescópica.

$$2S = \sum_{n=1}^{100} \left[\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) \right]$$

$$2S = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right)$$

$$2S = \frac{1}{4} - \frac{1}{104} + \frac{1}{5} - \frac{1}{105}$$

$$2S = \frac{941}{2184}$$

$$\therefore S = \frac{941}{4368}$$

Rpta.: C**Resolución 74:** En cada proposición:

$$\text{I. } \sum_{k=1}^n (k+2) = \sum_{k=1}^n (k) + 2n = \frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

$\Rightarrow$ la proposición es falsa (F)

$$\text{II. } \sum_{k=1}^n (k+1) = 27 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (k) + n = 27 = \frac{n(n+1)}{2} + n = 27$$

$$n^2 + 3n = 54$$

$$n(n+3) = 6 \cdot 9$$

$$n = 6$$

$\Rightarrow$ la proposición es falsa (F)

$$\text{III. } \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{3} \right)^k = \frac{1}{3} \left[\frac{3(3^{100} - 1)}{2 \cdot 3^{100}} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{3^{100} - 1}{3^{100}} \right)$$

$\Rightarrow$ la proposición es verdadera (V)

Rpta.: E

Resolución 75: La igualdad propuesta se puede reescribir así:

$$\sum_{k=1}^n [k(k+2)] = 14n + 49$$

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) = 14n + 49$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k = 14n + 49$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) = 14n + 49$$

$$\frac{n(n+1)(2n+7)}{6} = 14n + 49$$

$$\frac{n(n+1)(2n+7)}{6} = 7(2n+7)$$

$$n(n+1) = 42$$

$$\therefore n = 6$$

Rpta.: B

Resolución 76: Hallemos la suma:

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{3^k} \right)$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

$$3S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}}$$

Restando $\uparrow$:

$$2S = 1 + \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \frac{n}{3^n}$$

$$2S = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^n - 1}{\left(\frac{1}{3} \right) - 1} - \frac{n}{3^n}$$

$$2S = \frac{3^{n+1} - 3}{2 \cdot 3^n} - \frac{n}{3^n}$$

$$2S = \frac{3^{n+1} - 3 - 2n}{2 \cdot 3^n}$$

$$S = \frac{3^{n+1} - 3 - 2n}{4 \cdot 3^n}$$

$$S = \frac{3}{4} - \frac{3+2n}{4 \cdot 3^n}$$

$$S = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{2n+3}{3^n} \right)$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}$$

Rpta.: B

Resolución 77: Reescribiendo la expresión:

$$E = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k - \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1}$$

$$E = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$$

$$2E = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$4E = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$$

Restando $\ominus$:

$$2E = n \cdot 2^{n+1} - 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \dots - 2^n$$

$$2E = n \cdot 2^{n+1} - 2(1 + 2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1})$$

$$2E = n \cdot 2^{n+1} - 2 \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right)$$

$$2E = n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

$$E = n \cdot 2^n - 2^n + 1$$

$$\therefore E = 1 + (n-1) \cdot 2^n$$

Rpta.: B

Resolución 78: Fácilmente reconocemos que:

$$\tan\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

La suma se puede reescribir así:

$$S = \sum_{k=1}^{n+1} \log(2^{2^k})$$

$$S = \sum_{k=1}^{n+1} (2^k \cdot \log 2)$$

$$S = \log 2 \sum_{k=1}^{n+1} (2^k)$$

$$S = \log 2 (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1})$$

$$S = \log 2 \cdot 2(2^{n+1} - 1)$$

$$\therefore S = 2(2^{n+1} - 1) \log 2$$

Rpta.: C

Resolución 79: Por condición se plantea:

$$\sum_{k=1}^n (2k)(2k+2) = 1760$$

$$4 \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = 1760$$

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + k) = 440$$

$$\sum_{k=1}^n (k^2) + \sum_{k=1}^n (k) = 440$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = 440$$

$$\frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = 440$$

$$n(n+1)(n+2) = 3 \cdot 440$$

$$n(n+1)(n+2) = 10 \cdot 11 \cdot 12$$

$$\therefore n = 10$$

Rpta.: A

Resolución 80: La expresión dada es :

$$E = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{4}{16n^2 + 24n + 5} \right) \quad \dots$$

$$E = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{4}{(4n+1)(4n+5)} \right)$$

$$E = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right)$$

De acuerdo con la propiedad telescópica; tenemos:

$$E = \frac{1}{5} - \frac{1}{405}$$

$$\therefore E = \frac{80}{405}$$

Rpta.: C

Resolución 81: La suma se puede reescribir así:

$$S = \sum_{k=1}^{2010} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$$

$$S = \sum_{k=1}^{2010} \sqrt{\frac{(k^2 + k + 1)^2}{k^2(k+1)^2}}$$

$$S = \sum_{k=1}^{2010} \left[\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} \right]$$

$$S = \sum_{k=1}^{2010} \left[\frac{k(k+1) + 1}{k(k+1)} \right]$$

$$S = \sum_{k=1}^{2010} \left[1 + \frac{1}{k(k+1)} \right]$$

$$S = \sum_{k=1}^{2010} (1) + \sum_{k=1}^{2010} \left[\frac{1}{k(k+1)} \right]$$

$$S = 2010 + S = \underbrace{\sum_{k=1}^{2010} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{\text{telescópica}}$$

$$S = 2010 + 1 - \frac{1}{2011}$$

$$S = 2010 + \frac{2010}{2011} = 2010,9995$$

$$I. S > 2010$$

⇒ la proposición es verdadera (V)

$$II. S < 2010$$

⇒ la proposición es falsa (F)

$$III. \llbracket S \rrbracket = 2011$$

⇒ la proposición es falsa (F)

Rpta.: D

Resolución 82: Reescribiendo la suma; tenemos:

$$S = \sum_{k=0}^n 2^k + \sum_{k=0}^n 2^k - \sum_{k=0}^n 2^{n-k+1}$$

$$S = 2 \sum_{k=0}^n (2^k) - \sum_{k=0}^n (2^{n-k+1}) \dots (1)$$

$$* \sum_{k=0}^n (2^{n-k+1}) = 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2$$

$$\sum_{k=0}^n (2^{n-k+1}) = 2(2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

$$\sum_{k=0}^n (2^{n-k+1}) = 2 \sum_{k=0}^n (2^k)$$

Ahora en (1) tenemos:

$$S = 2 \sum_{k=0}^n (2^k) - 2 \sum_{k=0}^n (2^k)$$

$$\therefore S = 0$$

Rpta.: B

Resolución 83: Por series auxiliares y diferencias sucesivas tenemos:

$$S = \frac{3}{5} + \frac{6}{5^2} + \frac{11}{5^3} + \frac{20}{5^4} + \dots$$

$$5S = 3 + \frac{6}{5} + \frac{11}{5^2} + \frac{20}{5^3} + \dots$$

Restando $\uparrow$ $\ominus$:

$$4S = 3 + \frac{3}{5} + \frac{5}{5^2} + \frac{9}{5^3} + \dots$$

$$20S = 15 + 3 + \frac{5}{5} + \frac{9}{5^2} + \dots$$

Restando $\ominus$:

$$16S = 15 + \frac{2}{5} + \frac{4}{5^2} + \dots$$

$$16S = 15 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots$$

↳ Suma Límite

$$16S = 15 + \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}}$$

$$16S = 15 + \frac{2}{3}$$

$$16S = \frac{47}{3}$$

$$\therefore S = \frac{47}{48}$$

Rpta.: E

Resolución 84: Si "S" es el valor de convergencia, tenemos:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^n + n(n+1)}{2 \cdot 2^n \cdot n(n+1)} \right]$$

$$2S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^n + n(n+1)}{2^n \cdot n(n+1)} \right]$$

$$2S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right]$$

$$2S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$2S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Dando uso de la propiedad telescópica y la suma límite:

$$2S = 1 - \frac{1}{\infty} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} 2S &= 1 - 0 + 1 \\ 2S &= 2 \\ \therefore S &= 1 \end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 85: Veamos la sumatoria:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=m}^{\infty} \left[\frac{k}{(k+1)!} \right] \\ S &= \sum_{k=m}^{\infty} \left[\frac{(k+1)-1}{(k+1)!} \right] \\ S &= \sum_{k=m}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] \end{aligned}$$

Por la propiedad telescópica

$$S = \frac{1}{m!} - 0$$

$$S = \frac{1}{m!}$$

Por condición tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} &< \frac{1}{500} \\ m! &> 500 \\ \therefore m \text{ (mínimo)} &= 6 \end{aligned}$$

Rpta.: B

Resolución 86: En cada afirmación:

I. En efecto si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ es convergente, entonces $\lim (a_n) = 0$

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

II. Recordemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} \right)$ con $p > 1$ es convergente.

También recordemos que siendo $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series de términos positivos,

tenemos que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = k > 0$; entonces ambas series convergen o divergen

En el problema $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n = \frac{1}{2n^3 - 1} \right)$ consideremos la serie convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n = \frac{1}{n^3} \right)$ ahora se plantea :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{2n^3 - 1}}{\frac{1}{n^3}} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{2n^3 - 1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{1}{2} > 0$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)$ es convergente; $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ también es convergente

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

III. Recordemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} \right)$ con $p \leq 1$ es divergente, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

es divergente.

$\Rightarrow$ la afirmación es verdadera (V)

Rpta.: D

Resolución 87: La serie se puede reescribir así:

$$S = e^x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3(k+1) - k}{3^k \cdot k(k+1)} \right]$$

$$S = e^x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3(k+1)}{3^k \cdot k(k+1)} - \frac{k}{3^k \cdot k(k+1)} \right]$$

$$S = e^x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{k-1} \cdot k} - \frac{1}{3^k(k+1)} \right]$$

De acuerdo con la propiedad telescópica; tenemos:

$$S = e^x \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty} \right)$$

$$S = e^x(1 - 0)$$

$$\therefore S = e^x$$

Rpta.: C

Resolución 88: De acuerdo con los datos, reconocemos que $\{a_n\}$ es una progresión geométrica de razón x . Por condición tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a_0}{1-x} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{3}{2}$$

$$2 = 3 - 3x \rightarrow 3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Se pide calcular:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^3) \rightarrow S = \frac{a_0^3}{1-x^3}$$

Finalmente tenemos:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{27}}$$

$$\therefore S = \frac{27}{26}$$

Rpta.: C

Resolución 89: La serie se puede reescribir así:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k-1}{3^k \cdot k!} \right)$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{3^k \cdot k!} - \frac{1}{3^k \cdot k!} \right)$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{k-1} (k-1)!} - \frac{1}{3^k \cdot k!} \right)$$

De acuerdo con la propiedad telescópica, tenemos:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 0!} - \frac{1}{\infty}$$

$$S = 1 - 0$$

$$\therefore S = 1$$

Rpta.: A

Resolución 90: La igualdad propuesta se puede reescribir así:

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{(k-1)!}{(k+1)!} \right] = \frac{n^2 + n}{36}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{(k-1)!}{(k+1)(k)(k-1)!} \right] = \frac{n^2 + n}{36}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n^2 + n}{36}$$

Por la propiedad telescópica:

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n^2 + n}{36}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n(n+1)}{36}$$

$$36 = (n+1)^2; n > 0$$

$$6 = n+1$$

$$\therefore n = 5$$

Rpta.: B

Resolución 91: Dando uso de una serie auxiliar y la suma límite:

$$S_1 = 1 + \frac{2}{\pi} + \frac{3}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^3} + \dots$$

$$\pi S_1 = \pi + \frac{2}{1} + \frac{3}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{5}{\pi^3} + \dots$$

Restando $\uparrow \ominus$:

$$\pi S_1 - S_1 = \pi + 1 + \frac{1}{\pi} + \left(\frac{1}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{1}{\pi} \right)^3 + \dots$$

$$(\pi - 1)S_1 = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{\pi^2}{\pi - 1}$$

$$\therefore S_1 = \frac{\pi^2}{(\pi - 1)^2}$$

Rpta.: A

Resolución 92: Por condición tenemos:

$$a_n = 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}; \quad n = 0; 1; 2; 3; \dots$$

Se pide calcular:

$$M = a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$$

$$M = 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^0} \cdot 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \cdot 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \dots$$

Por suma límite en el exponente:

$$M = 3^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 3^2$$

$$\therefore M = 9$$

Rpta.: D

Resolución 93: Por la serie exponencial tenemos:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Se pide calcular:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right] = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Sumando uno a cada miembro:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right] + 1 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right] + 1 = e^x$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right] = e^x - 1$$

Rpta.: C

Resolución 94: De acuerdo con el texto el paciente recibe 10 unidades cada día; pero en su cuerpo sólo queda una parte y esta es $10(e^{-1/5})^T$.

Primer día:

$$10\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^1$$

Segundo día:

$$10\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^2$$

Tercer día

$$10\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^3$$

⋮

Si "T" es el total de unidades de medicamentos que habrá en el cuerpo del paciente se cumple que:

$$T = 10\left(e^{-\frac{1}{5}}\right) + 10\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^2 + 10\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^3 + \dots$$

Por suma límite:

$$T = \frac{10\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)}{1 - e^{-\frac{1}{5}}} = \frac{10}{\frac{1}{e^{\frac{1}{5}}} - 1}$$

$$T = \frac{10}{e^{\frac{1}{5}} - 1}$$

Rpta.: C

Resolución 95: En cada afirmación tenemos:

I. La afirmación es falsa (F)

$$S = \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots}_{\text{"n" términos}} \begin{cases} 0 : n = \text{par} \\ 1 : n = \text{impar} \end{cases}$$

II. La afirmación es falsa (F)

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{(-1)^n}{4n} \\ a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{8} \\ \vdots \end{array} \right\} \text{En la serie } a_1 = 1$$

III. La afirmación es verdadera (V)

Según la definición:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m)$$

Rpta.: B

Resolución 96:

En cada afirmación:

I. La afirmación es falsa (F)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \text{ es la serie armónica y esta es divergente.}$$

II. La afirmación es verdadera (V)

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) \text{ es convergente; entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$$

III. La afirmación es falsa (F)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Serie Armónica

Rpta.: D

Resolución 97:

En cada proposición:

I. La proposición es falsa (F)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n \rightarrow \infty}$$

será convergente cuando $b_{n \rightarrow \infty} = 0$

II. La proposición es verdadera (V)

Supongamos que:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2010^n}{(n+1)!}$$

$$S = \frac{2010}{2!} + \frac{(2010)^2}{3!} + \frac{(2010)^3}{4!} + \dots$$

$$2010S = \frac{(2010)^2}{2!} + \frac{(2010)^3}{3!} + \frac{(2010)^4}{4!} + \dots$$

Por serie exponencial:

$$2010S = e^{2010} - 1 - \frac{2010}{1!}$$

$$2010S = e^{2010} - 2011$$

$$S = \frac{e^{2010} - 2011}{2010} \text{ ¡Es convergente!}$$

III. La proposición es verdadera (V)

Por el criterio de comparación directa.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)$ también diverge; siempre que $a_n \leq b_n$

Rpta.: B

Resolución 98: Sea la suma "S", luego:

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} (e^{-4n})$$

Por suma límite:

$$S = \frac{e^{-8}}{1 - e^{-4}}$$

$$S = \left(\frac{e^{-8}}{1 - e^{-4}} \right) \frac{e^8}{e^8}$$

$$\therefore S = \frac{1}{e^8 - e^4}$$

Rpta.: A

Resolución 99: Supongamos que:

$$a_n = \frac{x_n}{1 + x_n n^2}$$

Asimismo que:

$$b_n = \frac{1}{n^2} \text{ ¡Convergente!}$$

Se plantea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 x_n}{1 + n^2 x_n} \right) = 1 > 0$$

Por el criterio de comparación por límites como

$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)$ es convergente; luego $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ también es convergente.

Por teorema toda sucesión convergente es acotada, luego tenemos:

I. (V) II. (F) III. (V)

Rpta.: C

Resolución 100: En cada afirmación:

I. La afirmación es verdadera (V)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^5}}$ es divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right)$; $p \geq 1$

II. La afirmación es verdadera (V)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5n(n+1)} \right] &= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} \right] \\ &= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]}_{\text{telescópica}} \\ &= \frac{1}{5} (1 - 0) \\ &= \frac{1}{5} \text{ !Es convergente!} \end{aligned}$$

III. La afirmación es falsa (F)

Por condición:

$$0 < a < b < 1 \rightarrow 0 < a^b < b^b < 1$$

Observa que:

$$0 < a^b < 1 \Leftrightarrow 1 < a^{-b} < \infty$$

Veamos la serie:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-b})^k$$

Como a^{-b} es mayor que uno, luego decimos que la serie es divergente.

Rpta.: C



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En que caso la suma de "n" términos de cualquier progresión aritmética de términos positivos será divisible entre "n".
- A) El número de términos "n" debe ser doble.
B) El número de términos "n" debe ser triple.
C) El número de términos "n" debe ser impar.
D) El número de términos debe ser par.
E) El número de términos es cuadrado perfecto.
2. Hallar la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su medida y los números que indican el área total y volumen del cubo, en ese orden, forman una progresión aritmética.
- A) $6 \pm \sqrt{35}$ B) $7 \pm \sqrt{35}$
C) $8 \pm \sqrt{35}$
D) $9 \pm \sqrt{35}$ E) $5 \pm \sqrt{35}$
3. Calcular el número de medios diferentes y proporcionales que se pueden interpolar entre los números 2 y 32 con la razón común 2. Indique la suma del número de medios en cada caso.
- A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20
4. En una P.A. los términos de lugares J; K y (J+K) son tales que la suma de los primeros es igual al último menos 1. Si la suma de los primeros es x; hallar el primer término de la progresión.
- A) $\frac{x-2}{J-K} + 1$ B) $\frac{x+2}{J+K} - 1$
C) $\frac{x+2}{J+K} + 1$
D) $\frac{x+2}{JK} + 1$ E) $\frac{x+2}{JK} - 1$
5. Calcular el 4to término de una P.A. de razón 1. Sabiendo que el número de términos es divisible por 3; que la suma de los términos es 33 y que el término de lugar (n/3) es 4
- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6
6. La suma de los términos de los seis primeros términos en la PA:
 $x - y$; x ; $x + y$ es:
- A) $6x + 6y$ B) $6x + 9y$ C) $6x + 8y$
D) $7x + 7y$ E) $8x + 8y$
7. Al interpolar 5 medios aritméticos entre $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{8}$, el término equidistante de los extremos es:
- A) $\frac{13}{48}$ B) $\frac{9}{48}$ C) $\frac{15}{48}$
D) $\frac{17}{48}$ E) $\frac{19}{48}$

8. En una P.A. el 1er término es 12; el número de términos es 9 y la suma de estos es 252; y en otra progresión también aritmética el 1er término es 2 y la razón es 6; 2 términos del mismo lugar de estas progresiones son iguales. ¿Cuál es el valor de ellos?

A) 30 B) 31 C) 32
D) 6 E) 7

9. La suma del cuarto y décimo término de una P.A. es 60 y la relación del segundo al décimo; $1/3$. Hallar el 1er término.

A) 10 B) 4 C) 6
D) 6 E) 8

10. En una P.A. de razón -4 el producto de sus 4 primeros términos es 144. Hallar el producto de los términos extremos de dicha progresión.

A) -36 B) 36 C) 4
D) -4 E) -8

11. El tercer término de una progresión aritmética representa la razón y el número de términos y la suma de todos sus términos es 8. Hallar dicho tercer término.

A) 1 B) 2 C) -4
D) 0 E) 4

12. A la 9 de la noche terminó una las sesiones de la plana de Álgebra y en el tiempo que duró la sesión el reloj dio 48 campanadas. ¿A qué hora empezó la sesión, si el reloj da las horas y medias horas?

A) 1 p.m. B) 2 p.m. C) 3 p.m.
D) 4 p.m. E) 8 p.m.

13. El 1er término de una progresión aritmética es 0,02 la razón 0,01 y el término central es igual al cuadrado de la suma de todos los términos. Calcular el número de estos.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

14. La suma de 4 números que están en progresión aritmética es 46 y el producto de los extremos es al producto de los medios como 27 es a 35. Hallar el último término

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

15. Calcular el número de términos de una progresión aritmética cuyo primer término es $(a - 2)$; la razón $(2 - a)$ y la suma $(10 - 5a)$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 16

16. En una progresión aritmética creciente de 5 términos la suma de los 3 centrales es 33 y el producto de los extremos 57. Hallar la razón.

A) 1 B) 11 C) 3
D) 4 E) 8

17. Determinar "q" para que las raíces de la ecuación : $x^4 - \frac{5x^2}{2} + q = 0$; formen una P.A.

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 4 E) $\frac{9}{16}$

18. De una P.A. de 40 términos se conocen la suma de los extremos y el producto de los 4 términos centrales. Hallar estos términos indicando el mayor sabiendo que la suma es 8 y el producto es -15.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 8 E) 6

19. Entre 3 y 768 y entre 7 y 112 se han interpolado el mismo número de medios proporcionales. Formar las 2 progresiones de manera que la razón de la primera sea doble que la de la segunda. Dar como respuesta la razón de la primera progresión.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

20. Determinar cuales de las siguientes sucesiones son progresiones armónicas.

I) $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \dots$

II) 2; 4; 6; 8; 10; $\dots$

III) $\frac{1}{12}; \frac{2}{15}; \frac{1}{3}; \dots$

A) Solo I B) Sólo II C) Sólo III
D) I y II E) I y III

21. Calcular el término 15 de la progresión armónica : $\frac{1}{4}; \frac{1}{7}; \frac{1}{10}; \dots$

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{13}$ C) $\frac{1}{15}$
D) $\frac{1}{46}$ E) $\frac{1}{18}$

22. Hallar 3 medias armónicas entre 10 y 20 indicando una de ellas.

A) 6 B) $\frac{7}{80}$ C) $\frac{1}{80}$
D) $\frac{3}{80}$ E) $\frac{11}{80}$

23. Sea la P.A.: a^2, b^2, c^2, d^2 ; cuya suma de sus términos es "n" siendo la razón "2n". Encontrar el valor de: $M = a^4 - d^4$

A) $-n^2$ B) $-2n^2$ C) $-3n^2$
D) $-4n^2$ E) $-5n^2$

24. Calcular las raíces de la ecuación:

$P(x) = x^3 + px + q = 0$; si están en progresión aritmética ($p \neq 0$).

A) p; 0; p

B) $-\sqrt{-p}$; 0; $\sqrt{-p}$

C) $-\sqrt{q}$; q; $2q + \sqrt{q}$

D) $\sqrt{p}$; 0; $-\sqrt{p}$

E) $\sqrt{p}\sqrt{q}$; 0; $\sqrt{p} - \sqrt{q}$

25. La suma de los 10 términos centrales de una P.A. decreciente de 24 términos es 625 y el producto de los extremos es 600.

¿Qué lugar ocupa aquel término cuyo valor es igual 5 veces la razón?

- A) 28
B) 23
C) 20
D) 18
E) No existe tal término

26. Dada la progresión:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-3}$. Calcular el cociente que resulta de dividir la sumatoria de todos sus términos entre el término medio.

- A) $\frac{n-3}{2}$
B) $n-6$
C) $\frac{n+9}{2}$
D) $n-3$
E) $\frac{3(n-3)}{2}$

27. Conociendo que: $\{x; y; z\}$ es una P.A.; además $\{y, x, z\}$ es una progresión geométrica. Hallar la razón de esta última asumiendo $x \neq y \neq z$

- A) -1
B) 3
C) -2
D) -3
E) 2

28. En una serie geométrica de números naturales de razón $q > 1$; $q \in \mathbb{N}$. La suma de los "n" primeros términos es 13; ($n < 5$). Si a_3 es el tercer término de la serie. Calcular: $a_3 + n$

- A) 12
B) 11
C) 10
D) 9
E) 8

29. Sean: $A = \{a; b; c\}$

$$B = \{x; y; z\}$$

cuyos elementos están ordenados en progresión geométrica y $C = \{ax; by; cz\}$ de elementos en progresión aritmética.

Calcular:

$$E = \left(\frac{ax}{cz} \right)^n + \left(\frac{cz}{ax} \right)^{1/n}$$

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

30. Hallar la razón de la progresión geométrica en donde la diferencia entre el primer y tercer término es 30 y la diferencia entre el segundo y cuarto término es 20.

- A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{2}{4}$
E) $\frac{2}{5}$

31. La suma de los números impares de términos de una progresión geométrica creciente es "a"; si se cambia de signo a los términos de orden par, la suma vale "b". Hallar la suma de los cuadrados de los números en progresión geométrica.

- A) a
B) b
C) ab
D) ba^2
E) ab^2

32. Encontrar que años de nuestro siglo cumple con la propiedad de que las tres diferencias formadas restando la primera cifra de la segunda, la segunda de la tercera y la tercera de la cuarta; estén en P.G. (razón $\neq 0$). Indicar la diferencia de los años obtenidos.

A) 32 B) 34 C) 36
D) 38 E) 40

33. Aplicando la suma de términos de una P.G. Hallar las fracciones generatrices de:

a) 0.777.....
b) 0.2666.....
c) 0.119119119.....
d) 0.835835835.....

Señalando la suma de los numeradores de las fracciones generatrices respectivas.

A) 895 B) 987 C) 957
D) 897 E) 956

34. ¿Cuál es el mayor de los lados de un cuadrilátero cuyos lados están en P.G. si se cumple que el tercer lado es igual al primero multiplicado por 1,44 y que el perímetro del cuadrilátero es 53,68 metros?

A) 17,28m B) 18,27m
C) 16,28m
D) 17,29m E) 15,28m

35. Los 3 lados de un triángulo están en P.G. entonces razón de esta progresión está comprendida entre:

A) 0,618 y 1,678
B) 0,628 y 1,818
C) 0,618 y 1,618
D) 0,638 y 1,681
E) 0,617 y 1,619

36. La suma de los términos de una progresión geométrica de 5 términos es 484; la suma de los términos de orden par (que ocupan lugares pares) es 120. ¿Cuál es la razón entera en la progresión?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

37. En que progresión geométrica de razón $1/2$ se cumple que: "la suma de los $(n+1)$ primeros términos excede en 63 a la suma de todos los términos que contienen después del primero. Si el término del lugar $(n+2)$ es numéricamente igual a la razón de dicha progresión. Calcular el primer término.

A) 62 B) 64 C) 66
D) 65 E) 76

38. Tres números reales distintos de cero forman una P.A. y los cuadrados de estos números tomados en la misma sucesión forman una progresión aritmética. Hallar una razón posible de esta última progresión.

A) $3 - 2\sqrt{2}$ B) $2 - 2\sqrt{2}$
C) $2 + \sqrt{2}$
D) $2 - 1\sqrt{2}$ E) $3 - \sqrt{2}$

39. La suma de los términos de una PG. decreciente e ilimitada es igual al doble de la suma de los 5 primeros términos, calcular la razón.
- A) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ B) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ C) $\sqrt{5}$
 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$
40. En una PG. de cuatro términos la suma de los dos primeros es 1 y la suma de los dos últimos es 16. Encontrar el primer término.
- A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
 D) 0,4 E) 0,5
41. En una PG. $t_1 = 3$ y $q = 2$
 Encontrar S_{10}
- A) 369 B) 3063 C) 3051
 D) 3069 E) 4024
42. La diferencia del tercer término menos el sexto término de una PG. es 26 y el cociente es 27. Calcular el primer término
- A) 245 B) 234 C) 243
 D) 1/9 E) 5/9
43. Si se interpolan cinco medios geométricos entre 8 y 5832 el quinto término de la progresión total es:
- A) 1944 B) 648 C) 729
 D) 2916 E) 1456
44. Dados 3 números con PG. de razón 4; se sabe que el cuádruplo de la suma de los 2 números excede en 28 unidades al mayor. ¿Cuánto vale éste?
- A) 36 B) 62 C) 96
 D) 108 E) 112
45. Si: $a - d = 8$, calcular:
 $(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$; donde:
 $\rightarrow a : b : c : d :$
- A) 64 B) 16 C) 32
 D) 112 E) 12
46. Tres números están en PA. decreciente y aumentados en 2; 1 y 5 respectivamente forman una PG. de tres términos cuya suma es 35, la razón y el producto de los tres términos de la progresión geométrica son respectivamente:
- A) $1/2$ y 1000 B) 2 y 35
 C) $1/2$ y 35
 D) $1/2$ y 100 E) 2 y 1000
47. A las 8am Carlos y Erika escuchan una noticia. Carlos comunica esta noticia a 2 de sus amigos cada uno de los cuales lo comunica a otros dos caballeros y así sucesivamente. Erika comunica la noticia a 3 de sus amigas; cada una de las cuales lo comunica a otras 3 damas y así sucesivamente, si cada persona demora 10 minutos en comunicar la noticia a sus oyentes. ¿Cuántos caballeros y cuántas damas conocerán esta noticia a las 9am?
- A) 100; 1000 B) 105; 1005
 C) 127; 1093
 D) 127; 1090 E) 125; 1093

48. En un juego de azar una persona apuesta la 1ra vez un sol y se propone triplicar la apuesta anterior y cada vez que tenga éxito gana una cantidad igual a su apuesta. En su octava apuesta obtiene por primera vez un éxito; si llevó S/10000. ¿Con cuánto dinero se retira?

- A) S/ 6720 B) S/ 13122
C) S/ 6719
D) S/ 13280 E) S/ 13281

49. Suponga usted que: m , $(k+2)$, $(3k+2)$, $(5k+6)$ y n están en progresión geométrica creciente. Calcular: $m+n+k$

- A) 24 B) 36 C) 48
D) 72 E) 60

50. Calcular el producto de los 10 términos de una progresión geométrica cuyo sexto y último término son 4 y 0,25 respectivamente.

- A) 16^{10} B) 2^{30} C) 32^5
D) 128^4 E) 2^{60}

51. Si en una progresión geométrica de seis términos la suma de los términos de lugar par es 546 y las que ocupan el lugar impar suman 182. Calcular la razón.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

52. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 2 y la suma de las quintas potencias de todos sus términos es $\frac{32}{31}$ calcular la razón.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

53. El vigésimo término de la sucesión $\left\{ \frac{\lambda n + 41}{4n + 1} \right\}$ es la unidad, ¿hacia qué valor converge dicha sucesión?

- A) 5 B) 8 C) 2
D) 1 E) $\frac{1}{2}$

54. Dada la sucesión: $\{2; 7; 16; 29; \dots; a_n\}$ Indicar el producto de los términos de a_n .

- A) $6n^3$ B) $-6n^3$ C) $4n^2$
D) $-2n^3$ E) $-4n^3$

55. La sucesión: $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}; \forall n \in \mathbb{N}$

- A) Es divergente
B) Es monótona y acotada
C) Es monótona y no acotada
D) Es decreciente
E) Es acotada

56. Analizar la convergencia de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{4^n}{n!} \right\}$$

- A) Converge a 0
B) Converge a $1/2$
C) Converge a 1
D) Converge a $1/4$
E) Es divergente

57. Dada la sucesión:

$$a_1 = \sqrt{1}; a_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}};$$

$$a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$

Calcular:

$$a_{n+1}^4 - 2a_{n+1}^2 - a_{n-1} \quad \forall n \geq 100$$

- A) 0 B) 1 C) $1 + \sqrt{2}$
D) $1 + \sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

58. Dada la sucesión:

$$2; \frac{11}{8}; \frac{7}{6}; \frac{17}{16}; \dots$$

¿A partir de que lugar los términos de la sucesión son menores que $4/5$?

- A) 14 vo B) 20 vo C) 21 vo
D) 26 vo E) 25 vo

59. Dada la sucesión:

$$1; \frac{9}{6}; \frac{19}{11}; \frac{33}{18}; \dots$$

Su regla de correspondencia es:

A) $\frac{2n^2}{n^2 + 1}$

B) $\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 3}$

C) $\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 2}$

D) $\frac{4n^2 - 3}{n^2 + 1}$

E) $\frac{4n^2 - 1}{n^2 + 2}$

60. Dada la sucesión: $\left\{ \frac{\text{Sen}(n)}{n} \right\}$ si

converge a L, calcular: $\frac{L+2}{L-2}$

A) -3

B) $\frac{1}{3}$

C) $-\frac{1}{3}$

D) -1

E) 1

61. Dada la sucesión de términos general

$$a_n = \frac{3n + 5}{4n + 12}$$

Indicar el lugar a partir del cual los términos de dicha sucesión difieren del límite en menos de 0,000001.

A) 999995 avo

B) 999999 avo

C) 999998 avo

D) 999997 avo

E) 999996 avo

62. Indicar a qué valor converge:

$$b_n = \frac{3}{\sqrt{81n^2 + 1}} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots + \frac{n+1}{2n+1} \right)$$

A) $\frac{1}{4}$

B) 6

C) 4

D) $\frac{1}{6}$

E) 1

63. Sean las sucesiones:

$$\{b_n\}; b_{n+1} = b_n + 4 \text{ con } b_1 = 5$$

$$\{b_n\}; c_{n+1} = -3C_n \text{ con } c_1 = 5$$

El valor de $\frac{b_n}{c_n}$ para "n" suficiente grande se aproxima a:

- A) 1 B) 0 C) $\frac{4}{3}$
D) $-\frac{4}{3}$ E) -1

64. Calcular "S" en caso de ser convergente

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{5^n} \right)$$

- A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{13}{6}$

65. Calcular:
- $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(K+P)!}{(K-1)!}$

- A) $\frac{(n+P+1)!}{P+2}$
B) $\frac{(n+P)!}{2P+3}$
C) $\frac{n^n}{(P+1)!}$
D) $\frac{(n+P+1)!}{(P+2)(n-1)!}$
E) $\frac{(n+P+1)!}{(n-1)(P+2)}$

66. Calcular:

$$R = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{K!}{(K+4)!}$$

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{18}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{24}$ E) 1

67. Dada la serie:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Determinar la suma:

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) 1

68. Calcular:

$$S = \sum_{K=1}^n K \cdot 2^K - \sum_{K=1}^n K \cdot 2^{K-1}$$

- A) $(n-1) \cdot 2^n$ B) $1 + (n-1) \cdot 2^n$
C) $2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$
D) $4 + (n-1) \cdot 2^{n+2}$ E) 0

69. Indicar a qué valor converge la sucesión:

$$a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$$

- A) 2 B) -2 C) 3
D) -3 E) $\sqrt{6}$

70. Hallar:

$$E = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

- A) $\frac{100}{199}$ B) $\frac{101}{202}$ C) $\frac{102}{203}$
D) $\frac{100}{201}$ E) $\frac{101}{201}$

71. Hallar la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

- A) 3 B) 2 C) 1
D) 4 E) 5

72. Hallar la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n \log_2 \left(\frac{n}{n+2} \right)$$

- A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2
D) $\frac{5}{2}$ E) 3

73. Si: $\sum_{k=1}^n 2k(3k-4) = 15540$

Entonces el valor de n es:

- A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

74. Dada: $S_n = 3+8+15+24+\dots+a_n$;
 $n \in \mathbb{N}$. Sabiendo que se puede

expresar como: $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Hallar: $a + b$

- A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{3}$ E) 1

75. Si:

$$S = 1 + 11 + 111 + \dots + 111 \dots 1$$

"n" unos

Hallar el valor de S

- A) $\frac{1}{9} \left(\frac{10^n - 10}{9} - n \right)$
B) $\frac{1}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n^2 \right)$
C) $\frac{1}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$
D) $\frac{1}{9} \left(\frac{10^n + 10}{9} - n \right)$
E) $\frac{1}{9} \left(\frac{10^{n+1} + 10}{9} - n \right)$

76. Calcule el valor de:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

- A) 1,75 B) 1,85 C) 1,95
D) 1,99 E) 1,89

77. Calcular:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{16 \cdot 21} + \dots$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{10}$

78. Si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+5)}$$

Calcule el valor de la suma.

- A) $\frac{23}{90}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{4}{95}$
D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{5}{9}$

79. Calcule:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}}$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

80. Analizar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right]$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

81. Indique la regla de correspondencia de la sucesión:

$$\frac{1}{3}; \frac{8}{9}; \frac{9}{7}; \frac{32}{21}; \dots$$

- A) $\frac{2n^2}{n^2+5}$ B) $\frac{3n^2}{2n^2+3}$
C) $\frac{2n^2}{n+5}$
D) $\frac{n+1}{n^2+5}$ E) $\frac{2n}{n^2+5}$

82. Si $\{a_n\}$ es una sucesión definida por:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 1, 2, \frac{13}{4}, 5, \frac{242}{32}, \dots \right\}$$

Entonces el octavo término es:

- A) $\frac{155}{7}$ B) $\frac{120}{8}$ C) $\frac{205}{8}$
D) $\frac{435}{12}$ E) $\frac{128}{3}$

83.Cuál es el quinto término de la sucesión:

$$\{a_n\}/a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = a_n^2 - 2n^2$$

- A) 318 B) 292 C) 929
D) 626 E) 783

84. La sucesión:

$$\{a_n\}_{n \geq 1} / a_n = \frac{an^3 + 2n^2 + 3n + 5 - 4n^3}{bn^2 + 4n + 5}$$

converge a 2. Hallar: $a+b$

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

85. Sea $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión definida

$$\text{por } \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{5}{3}; \frac{7}{6}; \frac{9}{9}; \frac{11}{12}; \dots \right\}.$$

Entonces el valor de convergencia es:

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) $\frac{3}{2}$

86. Calcular el valor al que converge la sucesión:

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 6n + 5} \right\}_n$$

- A) 1 B) e^{-6} C) $\frac{1}{6}$
D) 4 E) 64

87. En la sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{2}{4}\right)^1, \left(\frac{3}{5}\right)^2, \left(\frac{4}{6}\right)^3, \left(\frac{5}{7}\right)^4, \dots \right\}$$

Determinar el valor de convergencia:

- A) e B) 2e C) e^2
D) e^{-2} E) e^{-1}

88. Con respecto a la sucesión:

$$\{b_n\} = \{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I. La sucesión es creciente.
II. El elemento de lugar 5 de la sucesión es 32.
III. La suma de los 3 primeros elementos de la sucesión 14.

- A) VVF B) VFFF C) VVV
D) FVV E) FFF

89. En la sucesión de números reales:
Se sabe que $x_5 = 4,5$, entonces x_{105} será igual a:

- A) 4,5 B) 4,55 C) 4,555
D) 4,5555 E) 4,555555

90. Determine el valor de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$, donde:

$$a_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^n + 3^n}$$

- A) 5 B) 3 C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{5}{3}$ E) 0

91. Sea la sucesión definida mediante:

$$a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

Podemos entonces afirmar que:

- A) a_n converge para 0
B) a_n es decreciente
C) a_n está acotada por 1
D) a_n no converge
E) a_n converge a 2

92. Dada la sucesión de término general:

$$S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Entonces se puede decir que:

- A) S_n converge a 0
 B) S_n converge a 1
 C) S_n converge a 2
 D) S_n no converge a n
 E) S_n diverge
93. Si $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión definida

$$\text{por } \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{2^n + 3^n}{7^n + 4^n} \right\} n \in \mathbb{N}$$

Entonces el valor de convergencia es:

- A) 0 B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$
 D) $\frac{3}{4}$ E) 1

94. Se definen las sucesiones:

$$a_n = 3n^2 - 2n$$

$$\{b_n\} = \{0; 2; 6; 12; 20; \dots\}$$

¿A qué valor converge la sucesión:

$$\{c_n\} = \left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$$

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

95. Sea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) = L$$

Hallar el menor valor natural n_0 , tal

que:

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - L \right| < \epsilon; \forall n > n_0, \epsilon = 0,003$$

- A) 80 B) 81 C) 82
 D) 83 E) 84

96. Si:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = Lna, \forall a > 0 \wedge a \neq 1$$

Calcular $\lim (b_n)$.

$$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \left(\frac{1}{8^n + 125^n + 216^n} \right)^n \right\}$$

- A) e^{60} B) e^{30} C) 60
 D) 30 E) $\ln(60)$

97. Si
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
- es una sucesión tal que

$$a_1 = 1; a_2 = 2 \text{ y } a_{n+2} = \frac{a_n + 2a_{n+1}}{3};$$

$\forall n \geq 1$, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a:

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$
 D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

98. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La sucesión $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n \geq 1}$ es estrictamente decreciente.

II. La sucesión $\left\{\frac{2n}{1+2^n}\right\}_{n \geq 1}$ es estrictamente decreciente.

III. La sucesión $\left\{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}_{n \geq 1}$ es estrictamente creciente.

- A) VVV B) VVF C) FFV
D) FFF E) FVF

99. ¿A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$, si:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{16n^2 + 3}} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{5}{6}} + \dots + \sqrt{\frac{n+2}{n+3}} \right) ?$$

- A) 2 B) $\frac{1}{4}$ C) 3
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

100. A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$, si:

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{11} \cdot \dots \cdot \frac{2n+1}{3n+2}}$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) 1 E) 0



CLAVES

1	C
2	A
3	B
4	B
5	E
6	B
7	A
8	C
9	A
10	A
11	E
12	A
13	E
14	E
15	D
16	D
17	E
18	C
19	D
20	E
21	D
22	C
23	C
24	B
25	E

26	D
27	C
28	C
29	B
30	C
31	C
32	D
33	C
34	A
35	C
36	C
37	B
38	A
39	E
40	B
41	D
42	C
43	B
44	E
45	A
46	A
47	C
48	E
49	B
50	C

51	B
52	B
53	E
54	D
55	E
56	A
57	A
58	D
59	C
60	D
61	C
62	D
63	B
64	E
65	D
66	B
67	C
68	B
69	C
70	D
71	C
72	A
73	C
74	E
75	C

76	D
77	B
78	D
79	C
80	D
81	A
82	C
83	C
84	C
85	C
86	B
87	D
88	C
89	A
90	A
91	E
92	A
93	A
94	C
95	D
96	C
97	D
98	D
99	B
100	C

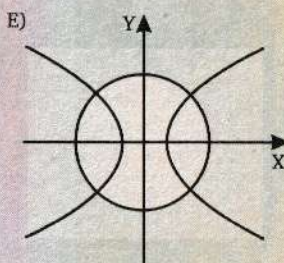
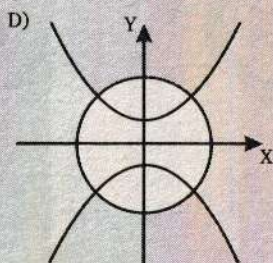
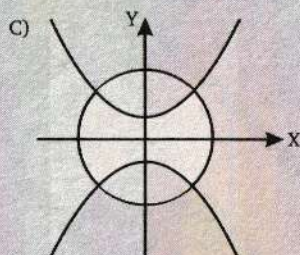
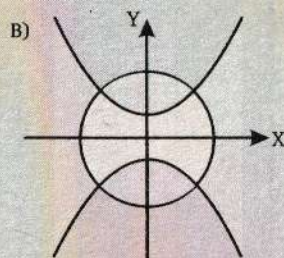
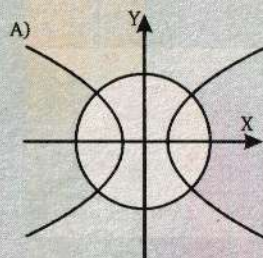
EXÁMENES DE ADMISIÓN UNIT

UNI - 2011 - I

PROBLEMA 01: El gráfico del conjunto del sistema de inequaciones

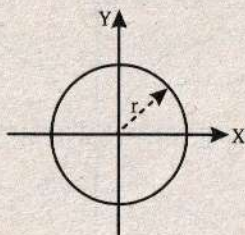
$$x^2 + y^2 \geq 4 \quad ; \quad x^2 - y^2 \leq 1$$

es representado por la región sombreada:



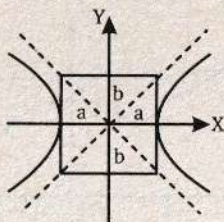
Resolución:

Gráfica de la circunferencia de centro en el origen.



$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots(1^*)$$

Gráfica de una hipérbola en su forma canónica , eje focal sobre el eje X.

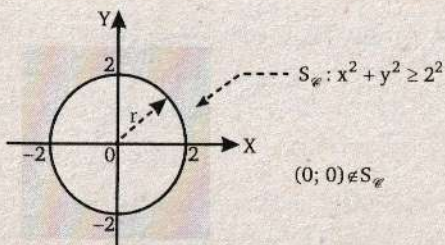


$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots(2^*)$$

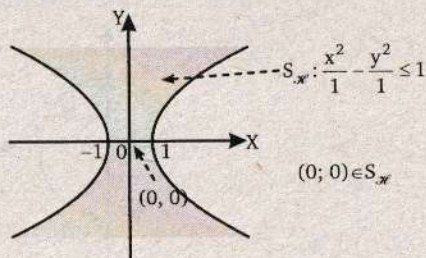
En el problema se tiene el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 & \dots(I) \\ x^2 - y^2 \leq 1 & \dots(II) \end{cases}$$

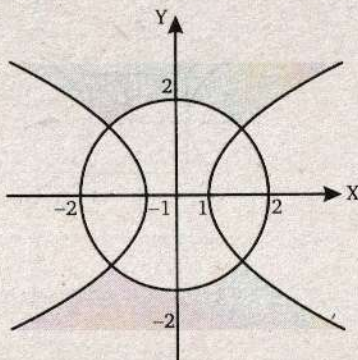
Aplicando (1*) graficamos la inecuación (I):



Aplicando (2*) graficamos la inecuación (II):



Combinando ambos gráficos :



Rpta.: A

PROBLEMA 02: Resuelva la inecuación exponencial

$$3^{|x|^2 - |x|} < 2^{1 - \sqrt{(x)^2}} \text{ e indique el intervalo solución}$$

A) $[0; +\infty)$

B) $[0; 1)$

C) $(1; +\infty)$

D) $[0; \log_3 2)$

E) $(1; \log_3 2)$

Resolución:

Si $a > 1$; $M > 0$ y $N > 0$ por propiedad de logaritmos se cumple:

$$* \log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N \quad \dots(1^*)$$

$$* \log_a a^M = M \quad \dots(2^*)$$

$$* \log_a M^N = N \log_a M \quad \dots(3^*)$$

En la ecuación exponencial del problema:

$$3^{|x|^2 - |x|} < 2^{1 - \sqrt{x}^2} \quad \dots(I)$$

Analizando las restricciones de los valores de la variable "x" se observa que existe el radical , entonces:

$$x \geq 0 \quad \dots(II)$$

Luego la expresión (I), considerando (II), queda reducida a:

$$3^{x^2} < 2^{1-x}$$

Aplicando la propiedad (1*):

$$\log_3(3^{x^2} - x) < \log_3(2^{1-x})$$

De (2*):

$$x^2 - x < \log_3(2^{1-x})$$

De (3*):

$$\begin{aligned} x^2 - x &< (1-x) \log_3 2 \\ \Rightarrow x(x-1) - (1-x) \log_3 2 &< 0 \\ x(x-1) + (x-1) \log_3 2 &< 0 \end{aligned}$$

De (II):

$$\begin{aligned} (x-1)(x + \log_3 2) &< 0 \\ \Rightarrow x-1 < 0 &\Rightarrow x < 1 \end{aligned}$$

De (II) y (III) se concluye que:

$$x \in [0; 1)$$

Rpta.: B

PROBLEMA 03: Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

- I. La composición de una función par con una función impar es una función par.
- II. El producto de dos funciones impares es una función impar.
- III. La suma de dos funciones pares es una función par.

- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) VFV | B) VVV | C) FVV |
| D) FFV | | E) VFF |

Resolución:

Si $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ son funciones definidas en $\mathbb{R}$, $\forall x, -x \in \text{Dom}(f)$ se cumple:

$$* f \text{ es impar} \Leftrightarrow f_{(-x)} = -f_{(x)} \quad \dots(1^*)$$

$$* f \text{ es par} \Leftrightarrow f_{(-x)} = f_{(x)} \quad \dots(2^*)$$

$$* (f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)} \quad \dots(3^*)$$

La composición $f \circ g$ con $g(x)$:

$$(f \circ g)_{(x)} = f_{(g(x))} \quad \dots(4^*)$$

Analizando las proposiciones del problema:

- I. La composición de una función par con una función impar es una función par. Verdadera (**V**)

Sea F una función par y G una función impar, entonces, aplicando (1^*) y (2^*) :

$$\text{Par :} \quad F_{(x)} = F_{(-x)}; \quad \forall x, -x \in \text{Dom}(F) \quad \dots(1)$$

$$\text{impar :} \quad G_{(-x)} = -G_{(x)}; \quad \forall x, -x \in \text{Dom}(G) \quad \dots(2)$$

La composición de F con G :

$$\text{De } (4^*) \quad (F \circ G)_{(-x)} = F_{(G(-x))}$$

$$\text{De } (2) : \quad = F_{(-G(x))}$$

$$\text{De } (1) : \quad = F_{(G(x))}$$

$$\text{De } (4^*) : \quad (F \circ G)_{(-x)} = (F \circ G)_{(x)}$$

De esta última expresión se concluye FG es una función par.

- II. El producto de dos funciones impares es una función impar. Falsa (**F**)

Sustentación

Tomemos como ejemplo las funciones impares:

$$F_{(x)} = x \text{ y } G_{(x)} = x^3$$

El producto de estas dos funciones:

$$(F.G)_{(x)} = (x)(x^3) = x^4$$

El resultado obtenido es de una función par, que por la propiedad (2*) se cumple:

$$(F.G)_{(-x)} = (F.G)_{(x)}$$

$$(-x)^4 = x^4$$

Al demostrar que por lo menos existen dos funciones impares, cuyo producto de la misma es una función par, se concluye que esta proposición no siempre se cumple.

III. La suma de dos funciones pares es una función par Verdadera (V)

Sustentación:

Sean F y G dos funciones pares, entonces por la propiedad (3*):

$$(F + G)_{(x)} = F_{(x)} + G_{(x)}$$

$$\text{De (2*)}: \quad = F_{(-x)} + G_{(-x)}$$

$$\text{De (3*)}: \quad = (F + G)_{(-x)}$$

De esta última expresión se concluya de dos funciones pares es una función par.

La secuencia correcta de las proposiciones : VFV

Rpta.: A

PROBLEMA 04: Si $P_{(x)} = x^3 + ax^2 - x + b - 6$ es divisible entre $x^2 - 1$ y la suma de los valores de x que cumplen $P_{(x)} = 0$ es -4 . Calcule el producto de a y b .

A) -7

B) -4

C) 4

D) 5

E) 8

Resolución:

Por el teorema del resto, si un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-a)$, entonces es una división exacta, y se cumple:

$$P(a) = 0$$

* Si un polinomio $P(x)$ es divisible por $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\dots$, entonces es divisible por $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, ..., luego cumple:

$$P(a) = P(b) = P(c) = \dots = 0 \quad \dots (1^*)$$

Por el teorema de Cardano, si:

$$P_{(x)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

donde $a_0 \neq 0$ y $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son sus raíces, se cumple:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = -\frac{a_1}{a_0} \quad \dots (2^*)$$

En el problema:

Aplicando (1^*) , si $P_{(x)} = x^3 + ax^2 - x + b - 6$ es divisible por $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$, entonces:

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3 + (1)^2 - (1) + b - 6 = 0 \\ \Rightarrow a + b &= 6 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

Aplicando (2^*) , como $P_{(x)} = x^3 + ax^2 - x + b - 6$, entonces $a_0 = 1$ y $a_1 = a$, además este polinomio es cúbico, por tanto tiene 3 raíces, entonces:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a}{1} \quad \dots (2)$$

Por condición del problema, $r_1 + r_2 + r_3 = -4$, entonces en (2) :

$$-4 = -a \Rightarrow a = 4$$

Reemplazando $a=4$ en (1):

$$(4) + b = 6 \Rightarrow b = 2$$

Calculando el producto de a por b :

$$a.b = (4)(2) = 8$$

Rpta.: E

PROBLEMA 05:

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposiciones relacionadas a matrices son verdaderas (V) falsas (F):

- I. Si A^2 es simétrica, entonces A es simétrica.
- II. Si $A+B$ son simétricas, entonces A es simétrica.
- III. Si A y B son matrices del mismo orden, ambas simétrica, entonces $A.B$ es simétrica.

A) FFF

B) FFV

C) FVF

D) VFF

E) VVF

Resolución:

La transpuesta de una matriz A se representa por A^T , se obtiene cambiando todas las filas por columnas y viceversa. Ejemplo :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} x & m \\ y & n \end{pmatrix}$$

Propiedades:

$$* (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \quad \dots(1^*)$$

$$* (A.B)^T = B^T.A^T \quad \dots(2^*)$$

Una matriz cuadrada A es simétrica si:

$$A = A^T \quad \dots(3^*)$$

Analizando las proposiciones del problema :

- I. Si A^2 es simétrica, entonces A es simétrica :

Falsa (F)

Sustentación :

Verifiquemos que se cumple (3^*) : $A^2 = (A^2)^T$; por tanto A^2 es simétrica.

Pero la matriz A no es simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Se observa que se cumple (3^*) : $A^2 = (A^2)^T$, por tanto A^2 es simétrica. Pero la matriz A no es simétrica.

- II. Si $A+B$ y B son simétricas, entonces A es simétrica.

Verdadera (V)

Sustentación:

Si $A+B$ y B son simétricas , entonces cumplen con la propiedad (3^*) , así:

$$A + B = (A + B)^T$$

$$\text{De (1*)}: A + B = A^T + B^T \quad \dots(1)$$

$$\text{De igual forma: } B = B^T \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$A + B = A^T + (B) \Rightarrow A = A^T$$

Luego por la propiedad (3^*) se deduce que A es simétrica.

- III. Si A y B son matrices del mismo orden , ambas simétricas , entonces A.B es simétrica .

Falsa (F)

Sustentación:

Como A y B son matrices simétricas del mismo orden, entonces se cumple (3^*) :

$$A = A^T \text{ y } B = B^T \quad \dots(1)$$

Si $A.B$ es simétrica, entonces también cumple la propiedad (3*):

$$A.B = (A.B)^T$$

De (2*): $A.B = B^T . A^T$

De (3*): $A.B = B.A$

La conmutación no siempre cumple, por lo tanto, esta proposición es falsa.

La secuencia correcta de las proposiciones: FVF

Rpta.: C

PROBLEMA 06: Señale el menor valor para x que dé solución al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = -25 \frac{x}{|x|} \\ |2x - 3| + y = 10 \end{cases}$$

A) -4

B) -3

C) -2

D) -1

E) 0

Resolución:

Señale el menor valor para x que dé solución al sistema siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a; & x \geq 0 \\ -a; & x < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dots (1^*) \\ \dots (2^*) \end{matrix}$$

En el sistema de ecuaciones del problema:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 25 \frac{x}{|x|} & \dots (I) \\ |2x - 3| + y = 10 & \dots (II) \end{cases}$$

Operando en (I), como $4x^2 + y^2 \geq 0$, entonces:

$$-25 \frac{x}{|x|} \geq 0 \Rightarrow x < 0 \quad \dots (1)$$

Considerando la restricción (1) en (I):

$$\begin{aligned} \text{De } (2^*): \quad 4x^2 + y^2 &= -25 \frac{x}{-x} \\ 4x^2 + y^2 &= 25 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

Considerando la restricción (1) en (I):

$$\begin{aligned} \underbrace{2x - 3} + y &= 10 \\ (-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De } (2^*): \quad -(2x - 3) + y &= 10 \\ -2x + 3 + y &= 10 \\ \Rightarrow y &= 2x + 7 \quad \dots(3) \end{aligned}$$

Reemplazando (3) en (2):

$$\begin{aligned} 4x^2 + (2x + 7)^2 &= 25 \\ 2x^2 + 7x + 6 &= 0 \\ (2x + 3)(x + 2) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= -\frac{3}{2} \vee x_2 = -2 \end{aligned}$$

El menor valor de x es -2

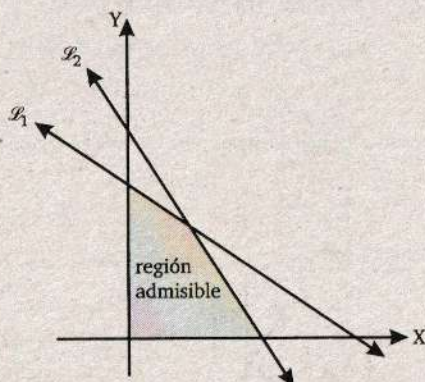
Rpta.: C

PROBLEMA 07: Un lago se llena de dos especies de peces S_1 y S_2 . La especie S_1 proporciona un peso promedio de 4 kg de carne y la especie S_2 un peso promedio de 2 kg. Dos tipos de comida F_1 y F_2 están disponibles en el lago. El requerimiento promedio de la especie S_1 es 1 unidad de F_1 y 3 unidades de F_2 , mientras que el requerimiento de S_2 son 2 unidades de F_1 y 1 unidad de F_2 cada día.

Si se dispone diariamente de 500 unidades de F_1 y 900 unidades de F_2 , determine el número total de peces en el lago que maximice el peso total de carne de pescado.

- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) 360 | B) 380 | C) 400 |
| D) 420 | | E) 460 |

Resolución:



En el problema:

Si la especie de peces S1 proporciona, por cada uno un peso promedio de 4 kg de carne, pero como existen "x", entonces, el promedio de total en peso que proporciona esta especie es:

$$P_1 = 4x \quad ; \quad (\text{kg})$$

Si la especie de peces S2 proporciona, por cada uno un peso promedio de 2 kg de carne, pero como existen "y" peces, entonces el promedio total en peso que proporciona esta especie es:

$$P_2 = 2y \quad ; \quad (\text{kg})$$

Luego, el total de peso que proporciona las dos especies juntas, es:

$$P_{(x; y)} = P_1 + P_2 = 4x + 2y \quad ; \quad (\text{Función objetivo})$$

Por otro lado, para alimentar al total de las dos especies, diariamente, se requiere de 500 unidades de F₁ y 900 unidades de F₂. Unitariamente, la especie S₁ requiere 1 unidad de F₁ y 3 unidades de F₂; la especie S₂ requiere de 2 unidades de F₁ y 1 unidad de F₂. Considerando el total de peces se tiene:

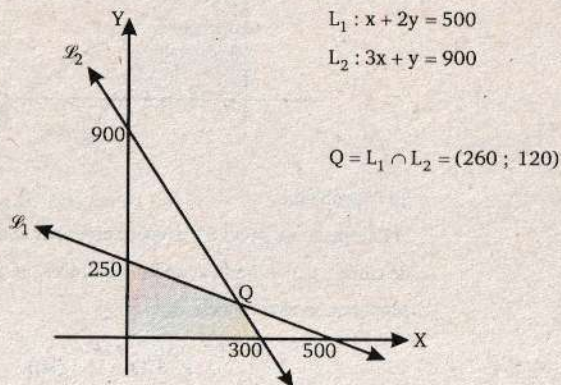
	S ₁	S ₂	T. unidades		
A alimento F ₁ :	(1)x + (2)y ≤ 500	;	(L ₁)	...(I)	
A alimento F ₂ :	(3)x + (1)y ≤ 900	;	(L ₂)	...(II)	

Además se considera que la cantidad de peces x e y :

$$x \geq 0 \quad \dots \text{(III)}$$

$$y \geq 0 \quad \dots \text{(IV)}$$

Graficamos las inecuaciones para obtener la región admisible, de (I), (II), (III) y (IV).



Ahora debemos tomar los puntos correspondientes a los vértices del polígono, para luego evaluarlos en la función objetivo.

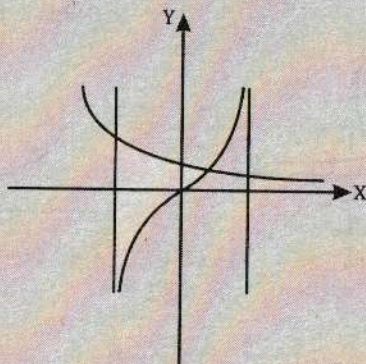
Vértices	$P_{(x,y)}$	$= 4x + 2y$
$(0 ; 0) :$	$\Rightarrow P_{(0;0)}$	$= 4(0) + 2(0) = 0$
$(0 ; 250) :$	$\Rightarrow P_{(0;250)}$	$= 4(0) + 2(250) = 500$
$(260 ; 120) :$	$\Rightarrow P_{(260;120)}$	$= 4(260) + 2(120) = 1280$
$(300 ; 0) :$	$\Rightarrow P_{(260;120)}$	$= 4(300) + 2(0) = 12000$

Luego se concluye que el número de peces que maximiza el peso total de la carne de pescado es:

$$N_T = x + y = 260 + 120 = 380$$

Rpta.: B

PROBLEMA 08: La región sombreada de la figura mostrada, representa al conjunto solución de un sistema de inecuaciones. Determine dicho sistema.



A) $\begin{cases} y + e^{-x} \leq 0 \\ y - \tan x \geq 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} y - e^{-x} \geq 0 \\ y - \tan x \leq 0 \\ x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

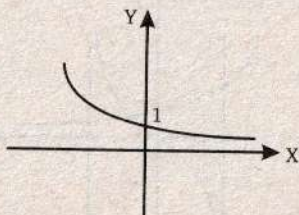
C) $\begin{cases} y + e^{-x} \leq 0 \\ y + \tan x \geq 0 \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

D) $\begin{cases} y - e^{-x} \geq 0 \\ y + \tan x \leq 0 \end{cases}$

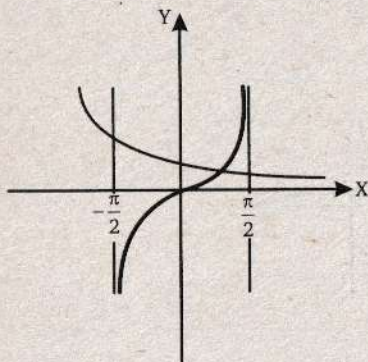
E) $\begin{cases} y - e^{-x} \leq 0 \\ y - \tan x \geq 0 \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Resolución:

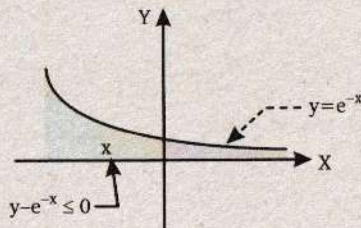
La gráfica de la función exponencial $y=e^{-x}$.



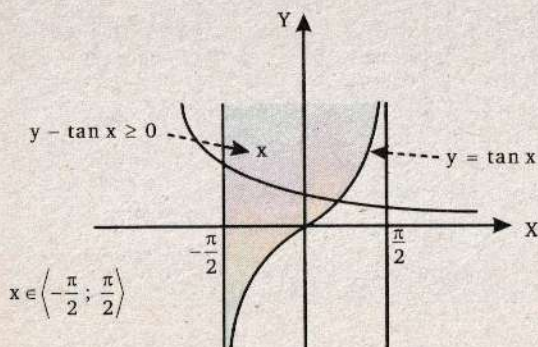
La gráfica de la función $y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. En la figura del problema:



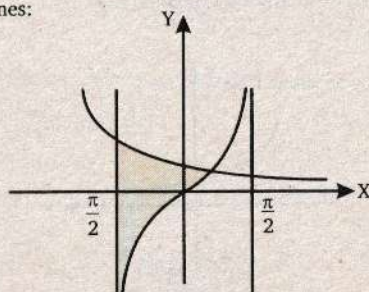
• Gráfica de la inecuación



• Gráfica de la inecuación $y \geq \tan x$ ó $y - \tan x \geq 0$:



Considerando la intersección de los dos gráficos se obtiene la gráfica pedida, la cual representa la gráfica del sistema de inecuaciones:



$$\begin{cases} y - e^{-x} \leq 0 \\ y - \tan x \geq 0 \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 09: Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, halle la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

A) 0,5

B) 1,0

C) 1,5

D) 2,0

E) 2,5

Resolución:

Sea :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

Entonces :

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \left(\frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

O bien :

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{(k+1)!} \right)$$

$$\therefore S = 1$$

Rpta.: B

- | | |
|----|---|
| 1 | Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales |
| 2 | El polinomio - Productos Notables |
| 3 | División Algebraica - Divisibilidad Algebraica |
| 4 | Factorización - Fracciones |
| 5 | Radicación - Racionalización |
| 6 | Potencia de un Binomio - Factorial de un Número -Combinatoria |
| 7 | Números Complejos |
| 8 | Ecuaciones |
| 9 | Desigualdades - Inecuaciones |
| 10 | Relaciones - Funciones |
| 11 | Función Exponencial - Logarítmación |
| 12 | Sucesiones - Series |
| 13 | Matrices - Determinantes |
| 14 | Sistema de Ecuaciones |
| 15 | Programación Lineal |

Teléfonos: 424 - 6350

992 - 796104



/ fondoeditorialrodo

editorialrodo@gmail.com

TEMARIO ÁLGEBRA



N°

TEMA

1

Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales